Česká
zemědělská
univerzita
v Praze

Fakulta lesnická
a dřevařská

Sbírka úloh z Matematiky

pro FLD ČZU

2024

RNDr. Marian Rybář

Česká zemědělská univerzita v Praze

Fakulta lesnická
a dřevařská

Sbírka úloh z Matematiky pro FLD ČZU

RNDr. Marian Rybář

2024

VÁŽENÍ PŘÁTELÉ MATEMATICI,

v této sbírce najdete soubor příkladů z Matematiky pro Fakultu lesnickou a dřevařskou České zemědělské univerzity v Praze. Výběr příkladů je zvolen tak, aby pokrýval většinu základních typů potřebných ke zkoušce. Úkolem této sbírky však není jen naučit příslušná témata ke zkoušce, ale také vysvětlit, k čemu je matematika dobrá v praktickém životě nejen absolventa Fakulty lesnické a dřevařské. Proto na konci této sbírky najdete také praktické ukázky použití některých probíraných příkladů ze života. Pokud budete mít matematiku po přečtení této sbírky alespoň o 1 % raději a uděláte jednodušeji zkoušku, splnila svůj účel 🙂.

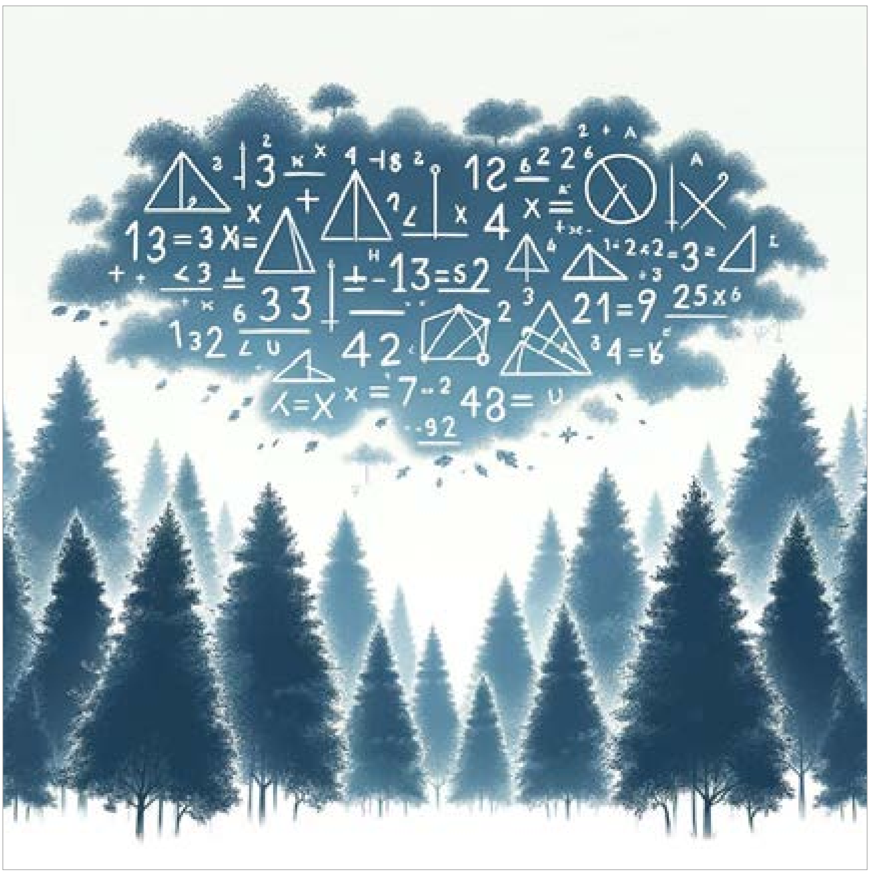
Červenou barvou je označen vždy jeden vzorový řešený příklad k danému tématu.

Modrou barvou jsou označeny příklady, které jsou vhodné pro řešení ve škole.

Černou barvou jsou značeny příklady, které jsou vhodné k samostatnému vyřešení doma.

Všechny výsledky k příkladům jsou k nalezení za každou kapitolou.

Přeji příjemné učení. RNDr. Marian Rybář



PŘEHLED PROBÍRANÝCH TÉMAT:

OBSAH:

1. TÉMA

DEFINIČNÍ OBORY

K čemu můžeme definiční obory v životě použít?

Mnoho praktických příkladů v životě vychází z funkcí (například funkce pro odhad výšky stromu y na základě obvodu jeho kmene ve výšce 1 m nad zemí x). U každé funkce pak musíme nejdříve určit, jaká x do ní můžeme dosadit. **Množina těchto x, pro která dává funkce smysl, je právě definiční obor.**

A co je to vlastně funkce? Jedna z pomůcek říká, že „Funkce je krabička, do které dosadíme x a vyjde nám nějaké y, které potřebujeme vědět“.

Praktický příklad použití můžeme vidět v příloze, kde najdeme Příběh 1 ze života manažerů pana Běžného a Chytrého: Vytvoření funkce pro odhad výšky stromu y na základě obvodu jeho kmene ve výšce 1 m nad zemí x a výpočet jejího definičního oboru.

Pro definiční obor musí platit 4 podmínky:

1. Jmenovatel musí být $\neq 0$
2. Argument odmocniny (to „vevnitř“) musí být ≥ 0
3. Argument logaritmu (to „vevnitř“) musí být >0
4. Argument arcsinus a arccosinus musí být mezi -1 a 1 ($-1 \leq x \leq 1$)
5. Argument tangens nerovná se $\pi/2 + k.\pi$
6. Argument cotangens nerovná se $k.\pi$

Příklad 1: Určete definiční obor funkce

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+5x-6}{x^2-9}}+\ln(25-x^2)+\log(log(x+10))$$

Kuchařka:

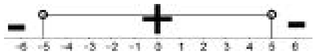
Krok 1: Vypíšu podmínky vedle sebe a vyřeším

$$\frac{x^2+5x-6}{x^2-9}\geq 0 \quad\wedge\quad x^2-9\neq 0 \quad\wedge\quad 25-x^2>0 \quad\wedge\quad \log(x+10)>0 \quad\wedge\quad x+10>0$$

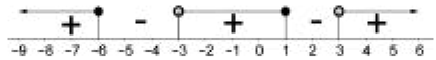
$$(x-3)(x+3)\neq 0 \qquad (5-x)(5+x)>0 \qquad \log(x+10)>\log 1 \qquad \mathbf{x>-10}$$

$$\boldsymbol{x\neq\pm 3} \qquad \boldsymbol{x\in(-5,5)} \qquad x+10>1$$

$$\boldsymbol{x>-9}$$

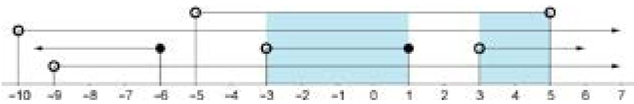


$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}=\begin{cases}1\\-6\end{cases}$$



$$\boldsymbol{x\in(-\infty,-6\rangle\cup(-3,1\rangle\cup(3,\infty)}$$

Krok 2: Zakreslím si výsledky na číselnou osu a udělám průnik (tam kde se čáry překrývají)



Řešení 1: $D_f=(-3,1\rangle\cup(3,5)$

Příklad 2: Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\frac{1}{1-\log(8-x)}+\sqrt{\frac{9x^2-1}{x^2-10x+21}}$$

Příklad 3: Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x}+3\arcsin\frac{-x}{x+6}$$

Příklad 4: Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\ln(x^2-4)+\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-x-20}}$$

Příklad 5: Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3x-4}{x^2-9}}+\log(\log(2x+15))$$

Příklad 6: Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\ln\frac{x^2+5x-6}{3^x-27}+\sqrt{x^2-4}$$

Příklad 7: Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\ln\frac{x^3-8}{x^2+5x-6}+e^{\sqrt{25-x^2}}$$

Příklad 8: Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \sqrt{\ln(x^2-4)} + \sqrt{\frac{x^2+2\mathrm{x}-3}{2^{\mathrm{x}}-4}}$$

Příklad 9: Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \arcsin\frac{2x-1}{5} + \ln(x^2-1)$$

Řešení:

1) $D_f = (-3, 1\rangle \cup (3, 5)$
2) $D_f = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{1}{3}, 3\right) \cup (7,8)$
3) $D_f = \langle -3, 0\rangle \cup \langle 3, \infty)$
4) $Df = (-\infty, -4) \cup \langle -3, -2) \cup (2, 3\rangle \cup (5, \infty)$
5) $Df = (-7, -4\rangle \cup (-3, 1\rangle \cup (3, \infty)$
6) $Df = (-6, -2\rangle \cup (3, \infty)$
7) $Df = \langle -5, 1) \cup (2, 5\rangle$
8) $Df = \langle -3, -\sqrt{5}\rangle \cup \langle \sqrt{5}, \infty)$
9) $Df = \langle -2, -1) \cup (1, 2) \cup (2, 3\rangle$

2. TÉMA

INVERZNÍ FUNKCE

K čemu můžeme inverzní funkce v životě použít?

V předchozí kapitole jsme si ukázali jeden z mnoha praktických příkladů, který vychází z funkcí (funkce pro odhad výšky stromu y na základě obvodu jeho kmene ve výšce 1 m nad zemí x). Mezi další příklady praktického použití funkcí v běžném životě patří mimo jiné například odhad produkce y na množství použitého hnojiva x nebo třeba odhad tržeb y na investicích do reklamy x.

Funkce v běžném tvaru odhaduje nějaké y v závislosti na x. V některých příkladech je ale účelné kromě této závislosti mít možnost odhadovat i x v závislosti na y. A tento problém právě řeší kapitola Inverzní funkce. Například: Kolik mám použít hnojiva x, abych dosáhnul požadované produkce y.

Příklad 1: Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f . Určete Df, Df^{-1}, Hf, Hf^{-1}

Kuchařka:

Krok 1: Vyjádřím z původní funkce obráceně x v závislosti na y

$$f: y = \frac{\pi}{2} + arcsin(3-x)$$
$$f: y - \frac{\pi}{2} = arcsin(3-x) \qquad /\sin$$
$$f: \sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = sin(arcsin(3-x))$$
$$f: \sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 3 - x$$
$$f: x = 3 - \sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

Krok 2: Prohodím x a y

$$f^{-1}: y = 3 - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Krok 3: Vypočtu Df = Hf^{-1}

$$-1 \leq 3 - x \leq 1$$
$$-4 \leq -x \leq -2 \qquad /.(-1)$$
$$2 \leq x \leq 4$$
$$Df = \langle 2, 4 \rangle = H f^{-1}$$

Krok 4: Vypočtu Hf = Df^{-1}

a) Pokud je funkce svým Df definovaná na uzavřeném intervalu jako v tomto případě, dosadím výsledky Df do zadání a vypočtu Hf

$$y_1 = \frac{\pi}{2} + arcsin(3-2) = \frac{\pi}{2} + arcsin(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$y_2 = \frac{\pi}{2} + arcsin(3-4) = \frac{\pi}{2} + arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$Hf = \langle 0, \pi \rangle = D f^{-1}$$

b) Pokud funkce svým Df není definovaná na uzavřeném intervalu jako v některých příkladech dále, vypočtu si z výsledné inverzní funkce Df^{-1} a položím jej **Df^{-1} = Hf**

Příklad 2: Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f . Určete Df, Df^{-1}, Hf, Hf^{-1}

$$y = 7 - 3 \cdot e^{2-x}$$

Příklad 3: Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f. Určete Df, Df^{-1}, Hf, Hf^{-1}

$$y = x^2 + 4x + 7; x \in (-\infty, 2\rangle$$

Příklad 4: Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f. Určete Df, Df^{-1}, Hf, Hf^{-1}

$$y = 5 - \frac{\sqrt{6-x}}{3}$$

Řešení:

1) $Df = \langle 2, 4\rangle = H f^{-1}$; $Df^{-1} = \langle 0, \pi\rangle = H f$

2) $Df = (-\infty; \infty) = H f^{-1}$; $Df^{-1} = (-\infty; 7) = H f$

3) $Df = (-\infty, -2\rangle = H f^{-1}$; $Df^{-1} = \langle 3, \infty) = H f$

4) $Df = (-\infty, 6\rangle = H f^{-1}$; $Df\text{-}^{-1} = (-\infty, 5\rangle = H f$

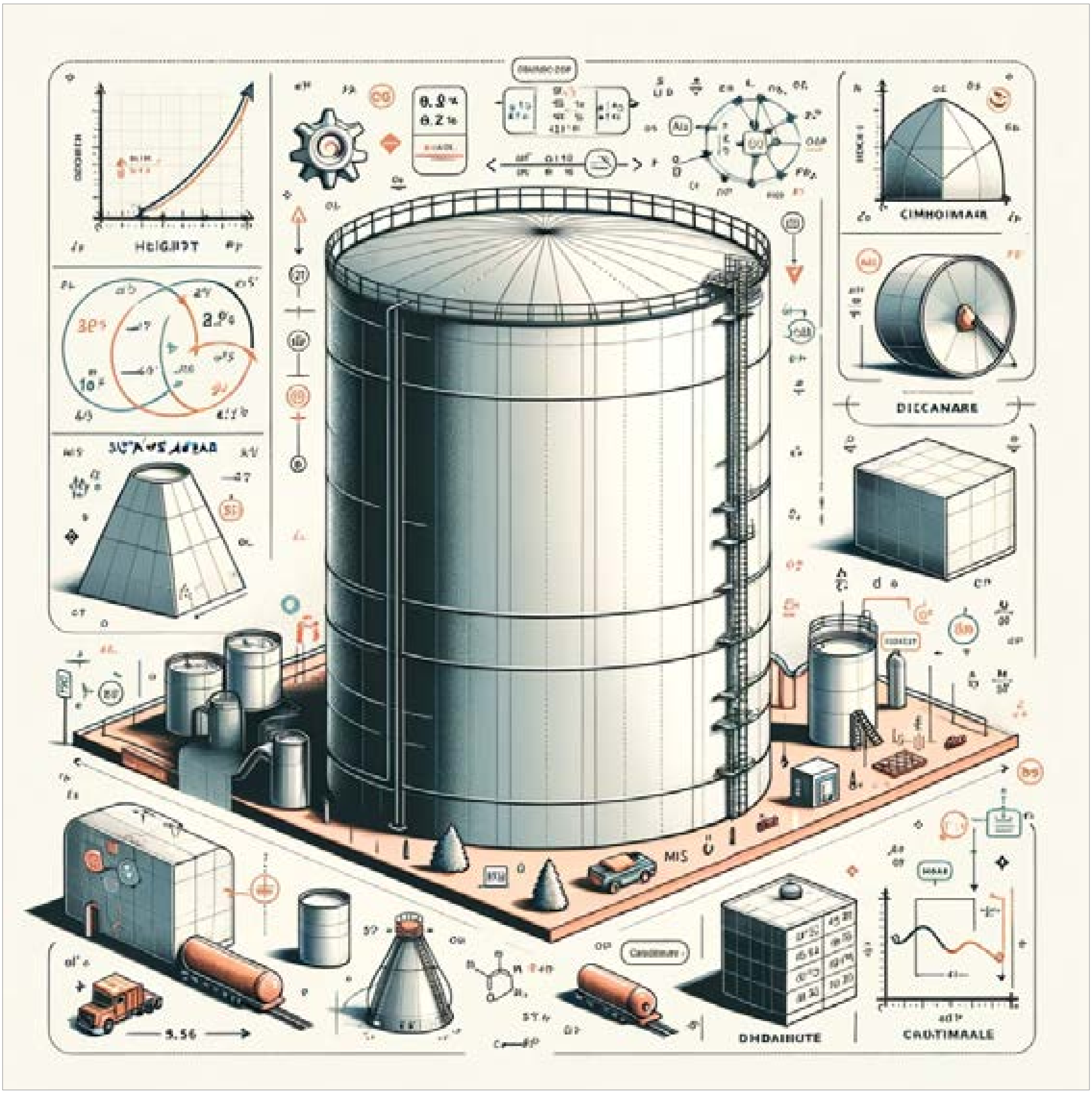
3. TÉMA

DERIVACE

K čemu můžeme derivace v životě použít?

Derivace umí kromě mnoha jiných důležitých aplikací zejména vypočítat, kde má nějaká funkce své maximum nebo minimum (funkci musíme zderivovat a položit = 0). Pokud tedy potřebujeme v praxi vypočítat, při jaké vstupní hodnotě „x“ bude největší nebo nejmenší hodnota výstupní proměnné „y“, musíme umět funkci nejdříve zderivovat.

Praktický příklad použití můžeme vidět v příloze, kde najdeme Příběh 2: Zakázka na válcové nádrže aneb jak vydělat pomocí derivace 1,5 mil Kč na Mercedes a luxusní dovolenou. Dalším praktickým příkladem může být Příběh 3 v příloze: Optimalizace trasy nákladních automobilů aneb jak ušetřit pohonné hmoty.



Příklad 1: Zderivujte funkci

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} + x \arcsin\frac{x}{3} + \arcsin\frac{1}{2}$$

Kuchařka:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}}(-2x) + 1 \cdot \arcsin\frac{x}{3} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}}\frac{1}{3} + 0$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} + \arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{3 \cdot \sqrt{\frac{9 - x^2}{9}}} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} + \arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = \mathbf{arcsin}\,\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}$$

Řešení 1: $f'(x) = \mathbf{arcsin}\,\frac{x}{3}$

Příklad 2: Zderivujte funkci:

$$\mathrm{f(x)} = \ln(\sqrt{\mathrm{x}^2 + 3} + \mathrm{x}) - \ln(\sqrt{\mathrm{x}^2 + 3} - \mathrm{x})$$

Příklad 3: Zderivujte funkci:

$$f(x) = \sqrt{4\mathrm{x} - \mathrm{x}^2} + 2 \arcsin\sqrt{x - 2}$$

Příklad 4: Zderivujte funkci:

$$f(x) = 16 \arcsin\frac{x}{4} - x\sqrt{16 - \mathrm{x}^2}$$

Řešení:

1) $f'(x) = \arcsin\frac{x}{3}$

2) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}$

3) $f'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}$

4) $f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

4. TÉMA

TEČNA A NORMÁLA V DANÉM BODĚ

K čemu můžeme tečnu a normálu v životě použít?

Tečna v daném bodě nám říká, kterým směrem se bude funkce ubírat, pokud hodnotu x (např. investice do reklamy) posuneme právě v tomto bodě o malý kousek. Směrnice tečny „k“ nám potom říká, o kolik jednotek se zvýší hodnota „y“ (např. tržby), pokud se hodnota „x“ (např. investice do reklamy) zvýší o jednotku.

Pokud má například tečna v nějakém bodě T směrnici k = 2, znamená to, že pokud zvýšíme investice do reklamy x v tomto bodě o 1 Kč, přinese nám to navýšení o 2 Kč. Kdyby ale byla směrnice v tomto bodě například k = - 2, reklama by se určitě v tomto bodě nevyplatila. Navýšení o 1 Kč v tomto bodě by přineslo snížení tržeb o 2 Kč.

Příklad 1: Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T[1,?]$

$$f(x) = 3 - 2\ln\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}$$

Kuchařka:

Krok 1: Dopočteme hodnotu funkce v bodě $x_0 = 1$ a získáme y_0:

$$y_0 = f(1) = 3 - 2\ln\sqrt{\frac{4-1}{1+2}} = 3 - 2\ln\sqrt{\frac{3}{3}} = 3 - 2\ln 1 = 3$$

Krok 2: Zderivujeme funkci f(x)

$$f'(x) = 0 - 2\frac{1}{\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}}\frac{-1(x+2)-(4-x)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{\frac{4-x}{x+2}}\frac{-6}{(x+2)^2} = \frac{6}{(4-x)(x+2)}$$

Krok 3: Dosadíme $x_0 = 1$ do derivace a získáme $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{6}{(4-1)(2+1)} = \frac{2}{3} = k$$

Krok 4: Dosadíme do vzorce pro tečnu t: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

$$t: y - 3 = \frac{2}{3}.(x-1)$$
$$t: 3y - 9 = 2x - 2$$

$$t: -2x + 3y - 7 = 0$$
$$\boldsymbol{t: 2x - 3y + 7 = 0}$$

Krok 5: Dosadíme do vzorce pro normálu $n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}.(x - x_0)$

$$n: y - 3 = -\frac{3}{2}.(x-1)$$
$$n: 2y - 6 = -3x + 3$$
$$\boldsymbol{n: 3x + 2y - 9 = 0}$$

Řešení 1:

$$\boldsymbol{t: 2x - 3y + 7 = 0}$$
$$\boldsymbol{n: 3x + 2y - 9 = 0}$$

Příklad 2: Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T[0,?]$

$$f(x) = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+3x}{1-2x}}$$

Příklad 3: Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T[1,?]$

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2+6x-5} - x$$

Příklad 4: Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T[1,?]$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+4x+2}}{x}$$

Příklad 5: Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T[0,?]$

$$f(x) = \frac{5x+3}{3x+3}$$

Příklad 6: Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T[1,?]$

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2+4x-3} - 2x$$

Řešení:

1) t: $2x - 3y + 7 = 0$, n: $3x + 2y - 9 = 0$

2) t: $5x - 2y + \pi = 0$, n: $4x + 10y - 5\pi = 0$

3) t: $4x - y - 4 = 0$, n : $x + 4y - 1 = 0$

4) t: $4x + 3y - 13 = 0$, n: $3x - 4y + 9 = 0$

5) t: $2x - 3y + 3 = 0$, n: $3x + 2y - 2 = 0$

6) t: $x - y - 2 = 0$, n: $x + y = 0$

5. TÉMA

TEČNA ROVNOBĚŽNÁ S PŘÍMKOU

Příklad 1: Napište rovnici tečny grafu funkce $f(x)$, která je rovnoběžná s přímkou p.

$f(x) = x^2 + 11x + 9, \qquad p: -15x + 3y - 4 = 0$

Kuchařka:

Krok 1: Převedeme přímku na směrnicový tvar $y = k.x+q$ a určíme si směrnici k

$p: -15x + 3y - 4 = 0$
$3y = 15x + 4$
$\Rightarrow y = 5x + \frac{4}{3}$

Z toho plyne, že k=5.

Krok 2: Získáme derivaci $f'(x)$

$f'(x) = 2x + 11$

Krok 3: Položíme do rovnosti $f'(x) = k$ a z rovnosti dopočítáme x_0. Dopočítáme dosazením hodnotu y_0.

$2x + 11 = 5$
$x_0 = -3$
$y_0 = f(x_0) = f(-3) = -15$

Krok 4: Dosadíme do vzorce pro tečnu t: $y-y_0 = f'(x_0).(x-x_0)$

$t: y + 15 = 5.(x + 3)$
$t: -5x + y = 0$
$\boldsymbol{t: y = 5x}$

Příklad 2: Napište rovnici tečny grafu funkce $f(x)$, která je rovnoběžná s přímkou p.

$f(x) = -x^2 - x - 6, \quad p: 3x - 3y = 7.$

Příklad 3: Napište rovnici tečny grafu funkce $f(x)$, která je rovnoběžná s přímkou p.

$f(x) = 3x - 5 - 2x^2, \quad p: x + y = 6.$

Příklad 4: Napište rovnici tečny grafu funkce $f(x)$, která je rovnoběžná s přímkou p.

$f(x) = 4x^2 + 6x + 3, \qquad p: 4x + 2y + 5 = 0$

Řešení:

1) t: $-5x + y = 0$

2) t: $x - y - 5 = 0$

3) t: $x + y + 3 = 0$

4) t: $2x + y + 1 = 0$

6. TÉMA

MONOTONIE

K čemu můžeme monotonii v životě použít?

Monotonie nám pomáhá zjistit, pro která x je funkce rostoucí, a pro která klesající. Mimoto také zjišťuje, kde má funkce své maximum, a kde minimum. Základem pro výpočet monotonie je použití derivací. Funkci musíme nejdříve zderivovat, položit derivaci = 0 a určit nulové body této první derivace. Následně zjistíme, kde je první derivace kladná (tam je sledovaná funkce rostoucí) a kde je záporná (tam je sledovaná funkce klesající).

Jako praktický příklad použití si můžeme představit Příběh 3 z přílohy: Optimalizace trasy nákladních automobilů aneb jak ušetřit pohonné hmoty. Podle výsledků monotonie vidíme, že funkce spotřeby je klesající na intervalu $\langle 0;1{,}601\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 1{,}601;\infty)$. V bodě 1,601 je lokální minimum a spotřeba pohonných hmot tedy bude v tomto bodě minimální.

Příklad 1: Určete maximální intervaly monotonie

$f(x) = 5 + 3\ln\sqrt{4-x^2}$

Kuchařka:

Krok 1: Určíme si definiční obor:

$\sqrt{4-x^2} > 0 \;/^2 \qquad \wedge \qquad 4 - x^2 \geq 0$

$(2-x)(2+x) > 0 \qquad (2-x)(2+x) \geq 0$

$x \in (-2{,}2) \qquad x \in \langle -2, 2\rangle$

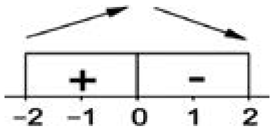
$D_f: x \in (-2, 2)$

Krok 2: Zderivujeme funkci, položíme $= 0$ a vypočteme nulové body čitatele i jmenovatele:

$$f'(x) = 3\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}(-2x) = \frac{-3x}{4-x^2} = 0$$

Nulové body derivace jsou $x=0$, $x=\pm 2$.

Krok 3: Zakreslíme nulové body **první derivace** na číselnou osu (Pouze ale v Df!!!). Dosadíme libovolné číslo z každého intervalu do první derivace a určíme znaménko. V intervalu, kde je derivace + je funkce rostoucí, kde je – je funkce klesající.



Krok 3: Napíšeme odpověď

Derivace je kladná na $(-2, 0\rangle$, tedy funkce je rostoucí na tomto intervalu. Derivace je záporná na $\langle 0, 2)$, tedy funkce je klesající na tomto intervalu.

V bodě 0 má funkce lokální maximum.

Příklad 2: Určete maximální intervaly monotonie

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^4}$$

Příklad 3: Určete maximální intervaly monotonie

$$f(x) = 2\sqrt{x+5} + \sqrt{16-2x}$$

Příklad 4: Určete maximální intervaly monotonie

$$f(x) = 1 - \sqrt{10x - x^2 - 21}$$

Příklad 5: Určete maximální intervaly monotonie

$$f(x) = 6^{\sqrt{-x^2+10x-16}}$$

Příklad 6: Určete maximální intervaly monotonie

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-4x-3}$$

Příklad 7: Určete maximální intervaly monotonie

$$f(x) = (x^2 - 7x + 13) \cdot e^x$$

Řešení:

1) Rostoucí na $(-2, 0\rangle$, klesající na $\langle 0, 2)$, lokální maximum v bodě 0
2) Klesající na $(0,1\rangle$, rostoucí na $\langle 1, \sqrt{e}\rangle$, klesající na $\langle \sqrt{e}, \infty)$, lokální minimum v bodě 1, lokální maximum v bodě $\sqrt{e}$
3) Rostoucí na $\langle -5, \frac{11}{3}\rangle$, klesající na $\langle \frac{11}{3}, 8\rangle$, lokální maximum v bodě $\frac{11}{3}$
4) Klesající na $\langle 3, 5\rangle$, rostoucí na $\langle 5,7\rangle$, lokální minimum v bodě 5
5) Rostoucí na $\langle 2, 5\rangle$, klesající na $\langle 5, 8\rangle$, lokální maximum v bodě 5
6) Rostoucí na $\langle 0, \frac{1}{8}\rangle$, klesající na $\langle \frac{1}{8}, \infty)$, lokální maximum v bodě $\frac{1}{8}$
7) Rostoucí na $(-\infty, 2\rangle$, klesající na $\langle 2, 3\rangle$, rostoucí na $\langle 3, \infty)$, lokální maximum v 2, lokální minimum v 3

7. TÉMA

KONVEXITA

K čemu můžeme konvexitu v životě použít?

Konvexita nám pomáhá zjistit, pro které hodnoty x je funkce konvexní (postupně se zrychluje), a pro která konkávní (postupně se zpomaluje). Funkci musíme nejdříve dvakrát zderivovat, položit druhou derivaci = 0 a určit nulové body této druhé derivace (inflexní body). Následně zjistíme, kde je druhá derivace kladná (tam je sledovaná funkce konvexní) a kde je záporná (tam je sledovaná funkce konkávní). Kromě konvexnosti a konkávnosti také zjistíme, kde má funkce svůj inflexní bod (bod, kde funkce nejrychleji roste nebo naopak klesá).

Jako praktický příklad použití si můžeme představit konkávní funkci pro závislost spotřeby nějakého levného zboží y na platu člověka x (s přibývajícím příjmem se funkce konkávně zpomaluje, protože lidi s vyšším příjmem jsou již levným zbožím nasyceni). Opakem je potom konvexní funkce pro závislost spotřeby nějakého luxusního zboží y na platu člověka x (s přibývajícím příjmem se funkce konvexně zrychluje, protože teprve lidé s vyšším příjmem si mohou luxusní zboží dovolit.

Příklad 1: Určete maximální intervaly konvexity

$f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

Kuchařka:

Krok 1: Definiční obor je: $D_f = \mathbb{R}$

Krok 2: Dvakrát zderivujeme:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + x^2 e^{-2x}(-2) = 2e^{-2x}\,(x - x^2)$$
$$f''(x) = 2e^{-2x}(-2)(x - x^2) + 2e^{-2x}\,(1 - 2x) = 2e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1)$$

Nulové body druhé derivace jsou $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Krok 3: Zakreslíme nulové body **druhé derivace** na číselnou osu. Dosadíme libovolné číslo z každého intervalu do druhé derivace a určíme znaménko. V intervalu, kde je derivace + je funkce konvexní, kde je – je funkce konkávní.

Krok 4: Napíšeme odpověď

Druhá derivace je kladná na $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ a na $\langle 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, tedy funkce je konvexní na těchto dvou intervalech

Druhá derivace je záporná na $\langle 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$, tedy funkce je konkávní na tomto intervalu.

Body $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ jsou inflexní.

Příklad 2: Určete maximální intervaly konvexity

$f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$

Příklad 3: Určete maximální intervaly konvexity

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Příklad 4: Určete maximální intervaly konvexity

$f(x) = x + \operatorname{arctg}(2x + 3)$

Příklad 5: Určete maximální intervaly konvexity

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + 15x - 22$

Řešení:

1) Konvexní na $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$, konkávní na $\langle 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$, konvexní na $\langle 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, inflexní body $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
2) Konkávní na $(-\infty, 0\rangle$, konvexní na $\langle 0, \infty)$, inflexní bod v 0
3) Konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a na $(0, \infty)$, inflexní bod v $-\frac{1}{2}$
4) Konvexní na $(-\infty, -\frac{3}{2}\rangle$, konkávní na $\langle -\frac{3}{2}, \infty)$, inflexní bod v $-\frac{3}{2}$
5) Konvexní na $(-\infty, 0\rangle$, konkávní na $\langle 0, 7\rangle$, konvexní na $\langle 7, \infty)$, inflexní body 0 a 7

8. TÉMA

EXTRÉMY NA UZAVŘENÉM INTERVALU

Příklad 1: Určete všechny extrémy na uzavřeném intervalu x ∈ ⟨-3, 3⟩ a jejich kvalitu

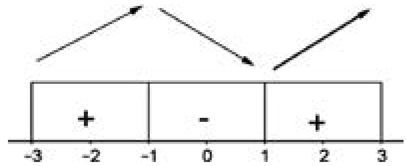
$f(x) = x^3 - 3x + 1$

Kuchařka:

Krok 1: Zderivujeme, určíme nulové body první derivace, zakreslíme na číselnou osu, určíme znaménka a najdeme lokální extrémy jako u monotonie:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \qquad 3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Lokální maximum je tedy v bodě -1 a lokální minimum v bodě +1



Krok 2: Vypočítáme funkční hodnoty ve všech lokálních extrémech a obou krajních bodech a podle funkčních hodnot určíme globální (absolutní) maxima a minima

$f(-3)=(-3)^3-3\cdot(-3)+1=-17$ ostré globální (absolutní) minimum

$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+1=3$ ostré lokální maximum

$f(1)=1^3-3\cdot 1+1=-1$ ostré lokální minimum

$f(3)=3^3-3\cdot 3+1=19$ ostré globální (absolutní) maximum

Příklad 2: Určete všechny extrémy a jejich kvalitu

$f(x) = -\frac{2}{3}\ln(x^2 - 4x + 7) + 10, x \in \langle 0, 5\rangle$

Příklad 3: Určete všechny extrémy a jejich kvalitu

$f(x) = 7\sqrt{4x^2 + 20x + 26} - 6, x \in \langle -3, 0\rangle$

Příklad 4: Určete všechny extrémy a jejich kvalitu

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x, x \in \langle -4, 0\rangle$

Příklad 5: Určete všechny extrémy a jejich kvalitu

$f(x) = \mathrm{arctg}(-x^2 + 2x + 13) + \mathrm{arctg}\, 6\ , x \in \langle 0, 2\rangle$

Řešení:

1) Ostré globální minimum v -3, ostré lokální maximum v -1, ostré lokální minimum v 1, ostré globální maximum v 3
2) Ostré globální maximum v 2, ostré globální minimum v 5
3) Ostré globální minimum v $-\frac{5}{2}$, ostré globální maximum v 0
4) Ostré globální minimum v -4, ostré globální maximum v 0, ostré lokální minimum v -2, ostré lokální maximum v -3
5) Ostré globální maximum v 1, (neostré) globální minimum v 0 a 2

9. TÉMA

NEURČITÉ INTEGRÁLY

K čemu můžeme integrály v životě použít?

Neurčité a určité integrály se v praxi používají kromě mnoha dalších aplikací k výpočtům ploch konkrétních geometrických útvarů (například pozemků). Funkci, která ohraničuje daný pozemek, musíme nejdříve zintegrovat a následně do výsledku dosadit dolní a horní mez integrálu. Výsledkem je potom hledaná plocha daného pozemku.

Jako praktický příklad použití si můžeme představit Příběh 4 z přílohy: Výpočet plochy nepravidelného pozemku pomocí určitého integrálu. V tomto příkladu si manažer pan Chytrý pomocí určitého integrálu bez problémů spočítá plochu pozemku, který potřebuje koupit. Přitom však zjistí, že mu prodejce plochu pozemku nadhodnotil.

Příklad 1: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int (3x+6)\left(e^x + \frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin x}\,(x+2)}\right) dx$$

Kuchařka:

Krok 1: Roznásobíme závorku a rozdělíme na dva integrály I_1 a I_2::

$$= \int (3x+6)\, e^x dx + \int (3x+6) \frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin x}\,(x+2)}\, dx = \underbrace{\int (3x+6)\, e^x dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{3\cos x}{\sqrt{4+\sin x}}\, dx}_{I_2}$$

Krok 2: Spočteme oba integrály zvlášť, první pomocí per partes, druhý pomocí substituce:

$$I_1 = \int (3x+6)\, e^x dx = \left| \begin{matrix} u' = e^x & v = 3x+6 \\ u = e^x & v' = 3 \end{matrix} \right| = (3x+6)\, e^x - \int 3e^x\, dx$$

$$= (3x+6)\, e^x - 3e^x + c$$

$$I_2 = \int \frac{3\cos x}{\sqrt{4+\sin x}}\, dx = \left| \begin{matrix} t = 4+\sin x \\ dt = \cos x\, dx \\ \dfrac{dt}{\cos x} = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{3\cos x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{3}{\sqrt{t}}\, dy = \int 3t^{-\frac{1}{2}}\, dy = 3\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 6\sqrt{t} + c = 6\sqrt{4+\sin x} + c$$

Krok 3: Sečtu oba mezivýsledky $I = I_1 + I_2$

$$I = I_1 + I_2 = (3x+6)\, e^x - 3e^x + 6\sqrt{4+\sin x} + c$$

Příklad 2: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{\ln x + x^2}{x^3} dx$$

Příklad 3: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \cos\sqrt{2-x}\, dx$$

Příklad 4: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \sin\sqrt{6x}\,dx$$

Příklad 5: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int x\left(e^x + \sqrt{4x^2+5}\right)dx$$

Příklad 6: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-64\ln^2 x}}$$

Příklad 7: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int x\left(e^x + \frac{x}{\sqrt{2x^3-7}}\right)dx$$

Příklad 8: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \cos x\left(e^{\sin x+3} + \frac{1}{\cos^3 x}\right)dx$$

Příklad 9: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \arcsin 2x\,dx$$

Příklad 10: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \operatorname{arctg} 3x\,dx$$

Příklad 11: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int x^2.e^x\,dx$$

Řešení:

1) $3(x+1)\,e^x + 6\sqrt{4+\sin x} + c$
2) $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \ln x + c$
3) $-2\sqrt{2-x}\sin\sqrt{2-x} - 2\cos\sqrt{2-x} + c$
4) $-\frac{1}{3}\sqrt{6x}\cos\sqrt{6x} + \frac{1}{3}\sin\sqrt{6x} + c$
5) $(x-1)e^x + \frac{1}{12}\sqrt{(4x^2+5)^3} + c$
6) $\frac{1}{8}\arcsin\frac{8\ln x}{3} + c$
7) $(x-1)e^x + \frac{1}{3}\sqrt{2x^3-7} + c$
8) $e^{\sin x+3} + \operatorname{tg} x + c$
9) $x.\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c$
10) $x.\operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}\ln|1+9x^2| + c$
11) $x^2.e^x - 2.(x.e^x - e^x) + c$

10. TÉMA

URČITÉ INTEGRÁLY

Příklad 1: Vypočtěte $\int_{\frac{4}{7}}^{\frac{6}{7}}(7x-6)^4 dx$

Kuchařka:

Krok 1: Postupuji stejně jako u substituce, ale meze určitého integrálu přepočítám ze „světa *x*“ do světa „*t*“.

$$\int_{\frac{4}{7}}^{\frac{6}{7}}(7x-6)^4 dx = \left| \begin{array}{l} t = 7x-6 \\ dt = 7\,dx \\ \frac{dt}{7} = dx \\ \frac{4}{7} \to -2 \\ \frac{6}{7} \to \ \ 0 \end{array} \right| = \int_{-2}^{0} t^4 \frac{dt}{7} = \frac{1}{7}\int_{-2}^{0} t^4\, dt = \frac{1}{7}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-2}^{0}$$

Krok 2: Dosadím horní i dolní mez do výsledného integrálu.

$$= \frac{1}{7}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{7}\left[\frac{0^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5}\right] = \frac{1}{7}\cdot\frac{32}{5} = \mathbf{\frac{32}{35}}$$

Příklad 2: Vypočtěte $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(6x+5\pi)\cos x\, dx$

Příklad 3: Vypočtěte $\int_{1}^{8}\log_2 x\, dx$

Příklad 4: Vypočtěte $\int_{5\pi}^{6\pi}\frac{1}{\cos^2\frac{x-7\pi}{6}} dx$

Příkad 5: Vypočtěte $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\, dx$

Řešení:

1) $\frac{32}{35}$ 2) $6-3\sqrt{3}+2\pi$ 3) $24-\frac{7}{\ln 2}$ 4) $4\sqrt{3}$ 5) $e-1$

11. TÉMA

VÝPOČTY PLOCH OBRAZCŮ

Příklad 1: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = 4, \quad y = x - 2, \quad y = 4 - x^2$$

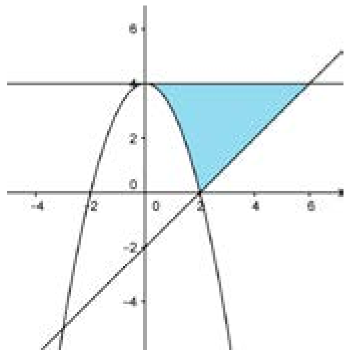
Kuchařka:

Krok 1: Zakreslíme obrázek - nakreslíme si všechny tři křivky do jednoho obrázku: Budeme počítat plochu vybarvenou modře. Rozdělíme si počítání do dvou částí – od nuly do dvou a od dvou do ?.

Krok 2: Vypočítáme neznámé meze: U první plochy meze známe (0 a 2), u druhé plochy si chybějící mez dopočítáme. Když položíme funkce $y = 4$ a $y = x-2$ do rovnosti, dostaneme jejich průsečík $x = 6$. Druhá plocha má tedy meze 2 a 6.

Krok 3: Pomocí integrálu dopočítáme obě plochy S_1 a S_2. Od horní funkce vždy v integrálu odečítáme dolní funkci. Plochy nakonec sečteme.

V první části od nuly do dvou i druhé od 2 do 6 je vyšší funkce $y = 4$:



$$S_1 = \int_0^2 4 - (4 - x^2)dx = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0$$

$$S_2 = \int_2^6 4 - (x - 2)\,dx = \int_2^6 6 - x\,dx = \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_2^6$$

$$= 36 - \frac{36}{2} - 12 + \frac{4}{2} = 8$$

Krok 3: Celková plocha je součtem obou ploch

$$S = S_1 + S_2 = \frac{8}{3} + 8 = \mathbf{\frac{32}{3}}$$

Příklad 2: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = x^2 + x - 2, \qquad 2x - y = 2$$

Příklad 3: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = 0, \qquad y = \sqrt{2x + 8}, \qquad y = \sqrt{2 - x}$$

Příklad 4: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = -1, \qquad y = \ln x, \qquad x = e$$

Příklad 5: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = 0, \qquad y = \sqrt{x - 1}, \qquad y = \sqrt{8 - 2x}$$

Příklad 6: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$x - y = 1, \qquad y = 2x^2 - 5x - 1$$

Příklad 7: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}, \qquad y = 0, \qquad x = \pi$$

Příklad 8: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$x + y = 5, \qquad x \cdot y = 4$$

Příklad 9: Vypočtěte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = e^3, \qquad y = e^{3x}, \qquad x = 0$$

Řešení:

1) $\frac{32}{3}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) 8 4) $e + \frac{1}{e}$ 5) $2\sqrt{2}$ 6) 9 7) $\ln 8$ 8) $\frac{15}{2} - 4\ln 4$ 9) $\frac{1}{3}(1 + 2e^3)$

12. TÉMA

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

K čemu můžeme diferenciální rovnice v životě použít?

Diferenciální rovnice se v praxi používají pro popis změny (tedy derivace) nějaké funkce v daném čase. Využívají se například v biologii pro popis rychlosti změny růstu populace nebo ve fyzice pro popis zrychlení tělesa v daném čase. Jsou základním nástrojem pro porozumění a předpovídání dynamiky systémů v reálném světě.

Například řešením diferenciální rovnice 1. řádu $P' = r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{k}\right)$, kde

P = velikost populace (např. zajíce polního) v čase t

r = míra růstu

K = kapacita prostředí

je po použití metody separace proměnných funkce $P(t) = \frac{K}{1+\frac{K-P_0}{P_0} \cdot e^{-rt}}$, která nám v každém čase t odhadne

počet jedinců zajíce polního v daném prostoru, pokud na počátku v čase $t = 0$ měla populace P_0 zajíců.

METODA SEPARACE PROMĚNNÝCH

Používá se, pokud lze odseparovat (oddělit od sebe) y a x

Příklad 1: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice.

$$y' - e^{3x-11} = 0$$

Kuchařka:

Krok 1: Oddělím všechno s y nalevo a všechno s x napravo

$$y' = e^{3x-11}$$

Krok 2: Dám před obě strany $\int$. Nalevo položím $y' = dy$ a napravo přidám dx

$$\int 1\,dy = \int e^{3x-11}\,dx$$

Krok 3: Obě strany zintegruji a získám výsledné řešení

$$y = \frac{e^{3x-11}}{3} + C$$

Příklad 2: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' \cdot \sin^2(2x-5) - y^2 = 0$$

Příklad 3: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - sin(-3x+5) = 0$$

Příklad 4: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$\frac{y'}{\sin(-7x+8)} - y^2 = 0$$

Řešení:

1) $y = \frac{e^{3x-11}}{3} + C$

2) $y = \frac{2}{c+\operatorname{cotg}(2x-5)}$

3) $y = -\frac{\cos(-3x+5)}{3} + C$

4) $y = -\frac{7}{c+\cos(-7x+8)}$

LINEÁRNÍ METODA

Používá se, pokud má diferenciální rovnice tvar $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

Příklad 1: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice.

$$y' - 3x^2y = 3x^2e^{x^3}$$

Kuchařka:

Krok 1: Zkontroluji, zda rovnice má tvar $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ a určím si f(x)

$f(x) = -3x^2$

Krok 2: Vytvořím substituci:

$y = k(x)\, e^{-\int f(x)dx} = k(x)\, e^{x^3}$

Krok 3: Dosadím substituci všude za y do zadání

$$\left(k(x)e^{x^3}\right)' - 3x^2k(x)e^{x^3} = 3x^2e^{x^3}$$
$$k'^{(x)e^{x^3}} + k(x)e^{x^3}3x^2 - 3x^2k(x)e^{x^3} = 3x^2e^{x^3}$$
$$k'(x)e^{x^3} = 3x^2e^{x^3}$$
$$k'(x) = 3x^2$$

Krok 4: Před obě strany dám integrál:

$$\int k'(x)dx = \int 3x^2dx$$
$$k(x) = x^3 + c$$

Krok 5: Dosadím $k(x)$ zpět do substituce y a získám obecné řešení:

$y^0 = (x^3 + c)\, e^{x^3}$ - obecné řešení

Příklad 2: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$xy' + y = 3e^{3x}$$

Příklad 3: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{x+1}{\cos x}$$

Příklad 4: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + y \cdot \operatorname{cotg} x = \cos^2 x\,, \qquad x \in (l\pi, (l+1)\pi)$$

Příklad 5: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - y \cdot \operatorname{tg} x = e^{\sin x}, \qquad x \in \left((2l-1)\frac{\pi}{2}, (2l+1)\frac{\pi}{2}\right), l \in \mathbb{Z}$$

Příklad 6: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$-2y' - 2y = -3x + 6$$

Příklad 7: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$5xy' + 5y = 6\sqrt[3]{x}$$

Příklad 8: Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x^2 - 1) \cdot y' - 2x \cdot y = 4x$$

Řešení:

1) $y = (x^3 + c)e^{x^3}$
2) $y = (e^{3x} + c)\frac{1}{x}$
3) $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right) \cdot \frac{1}{\cos x}$
4) $y = \left(-\frac{1}{3}\cos^3 x + c\right) \cdot \frac{1}{\sin x}$
5) $y = \left(e^{\sin x} + c\right)\frac{1}{\cos x}$
6) $y = ce^{-x} + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$
7) $y = \frac{9}{10}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}c$
8) $y = -2 + (x^2 - 1) \cdot c$

13. TÉMA

SOUSTAVY ROVNIC

K čemu můžeme soustavy rovnic v životě použít?

Soustavy rovnic se v praxi používají pro zjištění neznámých proměnných x,y,z,t,.., které spolu nějakým způsobem prakticky souvisí. Podstatou je přepsání reálných informací ze života do soustavy rovnic. Tato soustava se následně přepíše do matice a matice se vyřeší Gaussovou eliminační metodou nebo například aplikací v telefonu.

Jako praktický příklad použití si můžeme představit Příběh 5 z přílohy: Výpočet jednotkové ceny sazenic stromků na základě celkových cen nákupů. V tomto příkladu si manažer pan Chytrý pomocí soustavy rovnic vypočítá na základě informací o několika historických nákupech dřívější jednotkové ceny sazenic smrku, borovice a jedle, které již nejsou k dispozici.

Příklad 1: Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x - y + 3z + t &= 10 \\ y - 2z &= -5 \\ 2x + y - z + t &= 2 \\ 3x + 2y - 2z + 2t &= 2 \end{aligned}$$

Kuchařka:

Krok 1: Přepíšeme soustavu do matice a upravíme Gaussovou metodou na trojúhelníkový tvar (nuly pod diagonálou)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -7 & -1 & -18 \\ 0 & 5 & -11 & -1 & -28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Krok 2: Určíme hodnoty h, hr a n

$$h = 3, \quad h^r = 3, \quad n = 4$$

Krok 3: Z Frobeniovy věty má soustava nekonečně mnoho řešení s n-h=1 parametrem t = a. Dopočítám proměnné x,y,z a t.

$$\begin{aligned} t &= a \\ -1z - a &= -3 \\ -z &= -3 + a \\ z &= 3 - a \\ 1y - 2(3 - a) + 0a &= -5 \\ y - 6 + 2a &= -5 \\ y &= 1 - 2a \\ 1x - 1(1 - 2a) + 3(3 - a) + 1a &= 10 \\ x - 1 + 2a + 9 - 3a + a &= 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Krok 4: Obecné řešení má tvar: $x = 2,\ y = 1 - 2a,\ z = 3 - a,\ t = a \Rightarrow (2, 1 - 2a, 3 - a, a)$

Krok 5: Konkrétní řešení získáme dosazením libovolné hodnoty např. 1 za parametr a: např. $a = 1$

$x = 2, y = -1, z = 2, t = 1 \Rightarrow (2, -1, 2, 1)$

Krok 6: Dosadím konkrétní řešení do zadání a provedu zkoušku.

Příklad 2: Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y + z + 3t &= 3 \\ 2x + 2y + 4z + 5t &= 2 \\ 4x + 3y + 5z + 8t &= 5 \\ 6x + 4y + 6z + 11t &= 8 \end{aligned}$$

Příklad 3: Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y - z + 3t &= 2 \\ x + 3y + z + 4t &= 5 \\ x + 2y - z + 4t &= 4 \\ 2x + 4y - 2z + 6t &= 4 \end{aligned}$$

Příklad 4: Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x - y - 3z - 5t &= -3 \\ 2x - 6y + 5z - 3t &= -7 \\ x - 6z - 6t &= -2 \\ -2x + 5y - 2z + 4t &= 6 \end{aligned}$$

Příklad 5: Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x - 2y + t &= 2 \\ 2x - 3y - z + 9t &= -1 \\ x - 5z + 9t &= 1 \\ -2x + 3y + 4z - 3t &= -8 \end{aligned}$$

Příklad 6: Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + y - 2z - t &= 0 \\ x + 2y + 3z + 2t &= -4 \\ -2x - 4y + 2z + 4t &= 0 \\ 2x + 3y - 7z - 7t &= 4 \end{aligned}$$

Příklad 7: Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + 3y - 4t &= 4 \\ 2x + 7y + 4z &= 4 \\ x + 4y + 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 7y + 5z + 2t &= 2 \end{aligned}$$

Řešení:

1) obecné řešení $(2, 1 - 2a, 3 - a, a)$

2) obecné řešení $\left(2 - \frac{a}{2} + b, -1 - 2a - 3b,\ b,\ a\right)$

3) obecné řešení $(-6 + 5a, 1 - 2a,\ a,\ 2)$

4) obecné řešení $(24a - 20, 10a - 8, 3a - 3, a)$

5) obecné řešení $(-19a - 14, -9a - 8, -2a - 3, a)$

6) obecné řešení $(-3 - 3a, 1 + 2a, -a - 1, a)$

7) obecné řešení $(4a - 8, 4, -2 - 2a, a)$

14. TÉMA

INVERZNÍ MATICE

Příklad 1: Spočtěte inverzní matici k matici A a výsledek ověřte zkouškou

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 2: Spočtěte inverzní matici k matici A a výsledek ověřte zkouškou

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 3: Spočtěte inverzní matici k matici A a výsledek ověřte zkouškou

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

1) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

15. TÉMA

MATICOVÉ ROVNICE

Příklad 1: Spočtěte matici X z maticové rovnice $X \cdot D - C = 3X$, kde

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Kuchařka:

Krok 1: Z maticové rovnice si vyjádříme neznámou matici X (musím použít speciální maticové úpravy)

$$XD - C = 3X$$
$$XD - 3X = C$$
$$X(D - 3J) = C \quad /\cdot (D-3J)^{-1}$$
$$X(D-3J)(D-3J)^{-1} = C(D-3J)^{-1} \quad /\cdot (D-3J)^{-1}$$
$$X = C(D-3J)^{-1}$$

Krok 2: Dosadím do řešení pro X konkrétní matice C, D a J ze zadání a dopočtu neznámou matici X

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$D - 3J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$
$$(D-3J)^{-1} = \frac{1}{5-3}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$X = C(D-3J)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2: Spočtěte matici X z maticové rovnice $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -9 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 3: Spočtěte matici X z maticové rovnice $AX + B = 2A$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 4: Spočtěte matici X z maticové rovnice $XA = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

1) $X = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $X = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 9 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

16. TÉMA

APLIKOVANÁ STŘEDOŠKOLSKÁ MATEMATIKA

TROJČLENKA

Příklad 1: Majitel lesa sehnal v loňském roce na dvoutýdenní brigádu sázení sazenic stromků celkem 7 brigádníků a za tuto dobu se podařilo vysázet 6720 sazenic stromků. Kolik sazenic stromků se podaří vysázet v letošním roce, pokud na stejnou dvoutýdenní brigádu sehnal 10 brigádníků? Bude mu stačit koupit 10.000 sazenic?

Příklad 2: Skupina 6 pracovníků stihla na včerejší směně práci za 8 hodin. Následující den potřebuje majitel lesního závodu stihnout stejnou práci za 3 hodiny. Kolik pracovníků bude muset na zítřejší 3 hodiny přibrat k práci?

PROCENTA

Příklad 3: Manažer lesního závodu pan Habr doposud prodával odběrateli panu Šetřivému 1 m^3 dřeva za 12.000 Kč. Odběratel pan Šetřivý jej od nového roku nutí, aby mu prodával dřevo s 20 % slevou, jinak že dřevo odebírat nebude. Za kolik by pan Habr prodával 1 m^3 dřeva po slevě? Vyplatí se mu tento obchodní vztah s panem Šetřivým, pokud má možnost dodávat dřevo od nového roku jinému odběrateli panu Větvičkovi za cenu 10.000 Kč za 1 m^3 dřeva?

Příklad 4: Tepelnou úpravou dřeva v podniku Sušárna se dřevo zkrátilo z 3,2 metrů na 3,15 metrů. O kolik % se dřevo tepelnou úpravou zkrátilo?

Příklad 5: Sleva 8 % z původní ceny velké dodávky dřeva v podniku pana Habra odpovídala částce 100.000 Kč. Jaká byla původní cena celé dodávky dřeva?

Příklad 6: Majitel lesní obory pan Hajný prodával v prvním kvartálu roku 1 m^3 dřeva za 12.000 Kč. V druhém kvartálu prodával dřevo s 20 % slevou, v třetím kvartálu dřevo zdražil o 30 % a v posledním čtvrtém kvartálu roku opět zlevnil o 15 %. Za kolik prodával 1 m^3 dřeva v posledním čtvrtém kvartálu roku?

Příklad 7: Cena lesního stroje byla dle ceníku 3.000.000 Kč bez DPH. Jaká byla cena s DPH (21 %)?

Příklad 8: Cena lesního stroje byla dle ceníku 9.680.000 Kč včetně DPH. Jaká byla cena bez DPH (21 %)?

ROVNICE

Příklad 9: Manažer lesního závodu pan Smrček ví, že podle dokladů koupil celkem 200 sazenic smrků a borovic. Jedna sazenice smrku vyšla podle informací z e-shopu na 50 Kč, jedna sazenice borovice vyšla na 40 Kč. Celkem zjistil z účtu, že zaplatil dohromady 9.500 Kč. Kolik koupil sazenic smrku a kolik sazenic borovic?

FUNKCE

Příklad 10: Závislost objemu použitelného dřeva daného druhu stromu v m^3 (y) na obvodu stromu ve výšce 1 m v metrech (x) je popsána lineární funkcí $y = 0{,}1 + 4{,}8.x$. Odhadněte množství použitelného dřeva u stromu s obvodem ve výšce 1 m o hodnotě 80 cm. Jak se změní objem použitelného dřeva, pokud se obvod stromu ve výšce 1 m zvětší o 10 cm?

Příklad 11: Strom vzdálený 50 metrů vidíme pod úhlem 30 stupňů. Jaká je výška stromu?

Příklad 12: Přístřešek na dřevo má podle návodu vzniknout opřením 4 m dlouhých prken o svislou stěnu pod úhlem svírajícím s podlahou 45 stupňů. Do jaké výšky od podlahy budou prkna sahat (v jaké výšce od podlahy si máme udělat rysku)?

POSLOUPNOSTI A FINANČNÍ MATEMATIKA

Příklad 13: Pan Lesník zdědil po babičce Jarmile 1.000.000 Kč. Tyto peníze vložil do banky na 5 let s 3 % úrokem. Kolik peněz bude mít na účtu za 5 let? Bude mu částka za 5 let stačit na koupení sousedního lesa za 1.500.000 Kč?

Příklad 14: Kolik peněz musíme vložit dnes do banky, abychom měli za 4 roky při úroku 5 % na účtu 3.000.000 Kč?

PLANIMETRIE

Příklad 15: Bývalý student Fakulty lesnictví a dřevařství vlastní se svým bratrem obdélníkovou lesní oboru o stranách 4000 m a 3000 m. S bratrem potřebují oboru rozdělit po úhlopříčce plotem na dvě stejné poloviny. Cena plotu je 800 Kč/m^2. Kolik bude stát plot?

Příklad 16: Bývalý student Fakulty lesnictví a dřevařství potřebuje pro ovce na pozemku kruhovou ohradu o průměru 20 m. Kolik zaplatí celkem za oplocení této ohrady, pokud 1 metr plotu stojí 1200 Kč? Kolik sáčků osiva trávy musí alespoň koupit, pokud jeden sáček vystačí na 20 m^2 pozemku?

STEREOMETRIE

Příklad 17: Bývalý student Fakulty lesnictví a dřevařství si pořídil akvárium o rozměrech a = 8 dm, b = 5 dm a c = 4 dm. Kolik vody se do akvária vejde? Může v něm žít 5 zlatých okrasných karasů, pokud každý potřebuje 70 l vody? Kolik skla se spotřebovalo na výrobu akvária?

Příklad 18: Přístřešek na seno tvaru „teepee" má tvar rotačního kužele o poloměru r = 2 m a výšce v = 5 m. Kolik m^3 sena v něm můžeme skladovat? Kolik m^2 plachty musíme alespoň koupit na jeho pokrytí?

Řešení:

1) 9600 stromků, bude

2) 10 lidí

3) 9.600 Kč, nevyplatí

4) 1,6 %

5) 1.250.000 Kč

6) 10.608 Kč

7) 3.630.000 Kč

8) 8.000.000 Kč

9) 150 sazenic smrku a 50 sazenic borovice

10) 3,94 m^3, zvětší se o 0,48 m^3

11) 28,8675 m

12) 2,8284 m

13) 1.159.274,074 Kč, nebude

14) 2.468.107 Kč

15) 4.000.000 Kč

16) 75.360 Kč, alespoň 16 sáčků

17) 160 litrů, nevejde, 1,84 m^2

18) 20,9334 m^3, 46,3781 m^2

POUŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ [f(x) \geq 0 \text{ na } \langle a,b\rangle] \quad P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \ [f(x) \geq g(x) \text{ na } \langle a,b\rangle]$$

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \quad S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

FUNKCE GAMA A BETA

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

$$\mathrm{B}\,(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{B}\,(x,y) = \mathrm{B}\,(y,x), \quad \mathrm{B}\,(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

$$\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x, \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x, \operatorname{tg}(x \pm k\pi) = \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg}(x \pm k\pi) = \operatorname{cotg} x,$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	$*$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{cotg} x$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$*$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{cotg}\alpha}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

DIFERENCIÁLNÍ POČET

$(\text{konst.})' = 0$

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$(\mathrm{a}^x)' = \mathrm{a}^x \cdot \ln \mathrm{a}$

$(\log_\mathrm{a} x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln \mathrm{a}}$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(x)' = 1$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \cdot \ln f(x)}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 10}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

INTEGRÁLNÍ POČET

$\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

$\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$\displaystyle\int \mathrm{a}^x \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln \mathrm{a}} + C$

$\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

$\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

$\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\displaystyle\int 0 \, \mathrm{d}x = C$

$\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C$

$\displaystyle\int k \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = k \cdot \int f(x) \, \mathrm{d}x$

$\displaystyle\int (f(x) \pm g(x)) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x$

$\displaystyle\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$

$\displaystyle\int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$

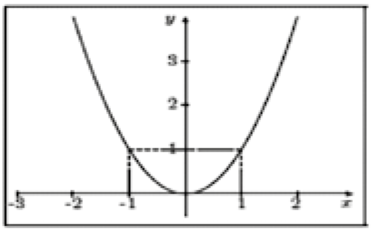
$\displaystyle\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} g(x) = t \\ g'(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t) \, \mathrm{d}t = \cdots = F(t) = F(g(x)) + C$

$\displaystyle\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{a} F(ax+b) + C$ (pro $F'(x) = f(x)$)

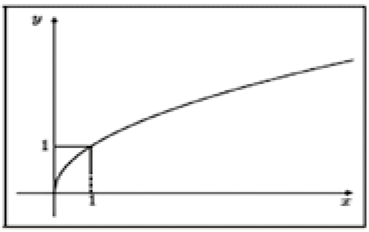
$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)} \mathrm{d}x = \ln|g(x)| + C$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} g(x) = t & a \to g(a) \\ g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t & b \to g(b) \end{array} \right| = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, \mathrm{d}t = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

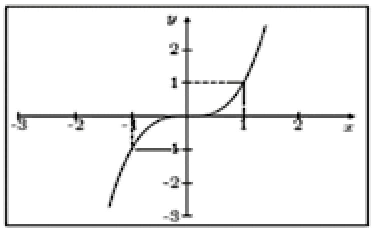
GRAFY ZÁKLADNÍCH ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ



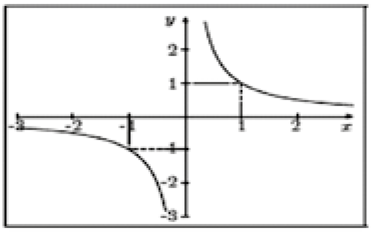
$y = x^2$



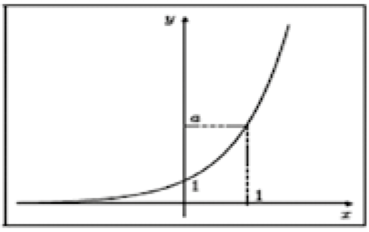
$y = \sqrt{x}$



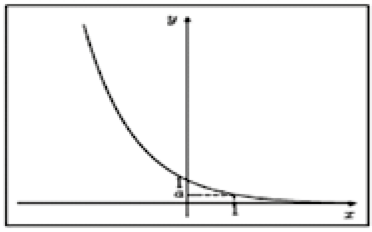
$y = x^3$



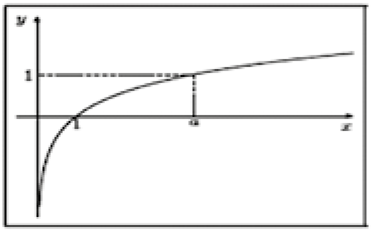
$y = \frac{1}{x}$



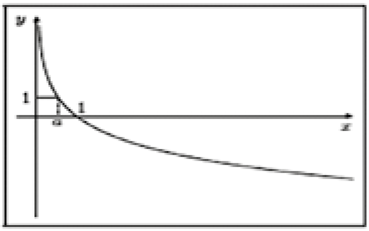
$y = a^x, \; a > 1$



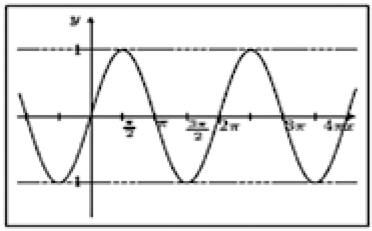
$y = a^x, \; 0 < a < 1$



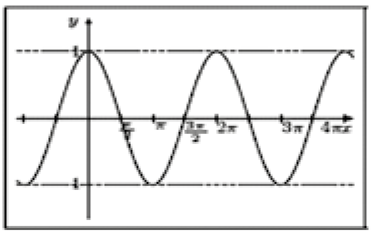
$y = \log_a x, \; a > 1$



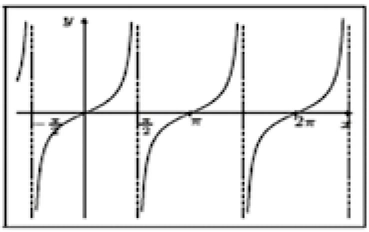
$y = \log_a x, \; 0 < a < 1$



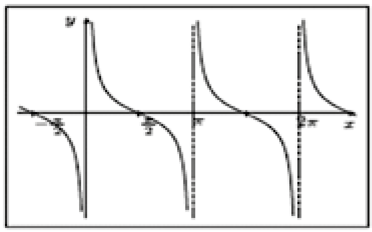
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{cotg} x$

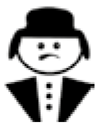
K ČEMU MŮŽEME MATEMATIKU V ŽIVOTĚ POUŽÍT?

Pokud chceme mít matematiku rádi, potřebujeme vědět, k čemu se dá vlastně v životě použít 🙂. Ukážeme si tedy pět ukázkových příběhů ze života dvou manažerů: Manažera pana Běžného a manažera pana Chytrého a podíváme se, jak by byli úspěšní ve svém podnikání se znalostí VŠ matematiky, a naopak bez znalosti VŠ matematiky.

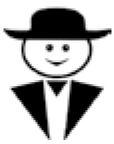
DEFINIČNÍ OBORY FUNKCÍ

Příběh 1: Vytvoření funkce pro odhad výšky stromu „y“ na základě obvodu jeho kmene ve výšce 1 m nad zemí „x“ a výpočet jejího definičního oboru.

Z pěti dvojic měření obvodu kmene stromu ve výšce 1 m nad zemí a jeho výšky máme odhadnout optimální funkci pro odhad výšky stromu „y“ na základě obvodu jeho kmene ve výšce 1 m nad zemí „x“ a vypočítat její definiční obor.

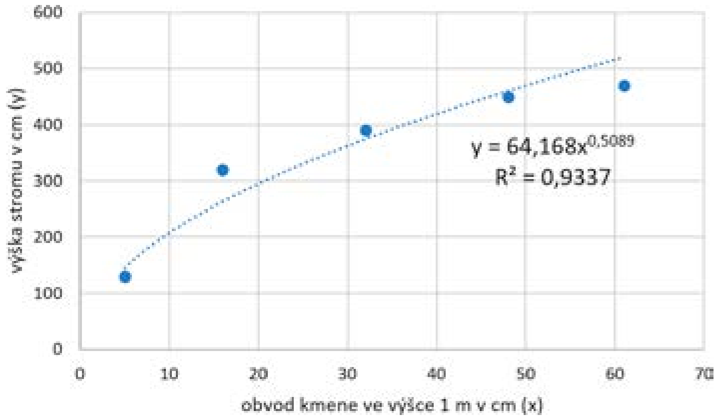


Manažer Běžný: Ve škole slyšel mnohokrát pojem „funkce“, ale nikdy se nedozvěděl, k čemu se dá použít. Výšku stromu tedy jeho zaměstnanci měří buďto riskantně ze žebříku, nebo ji odhadují přibližně.

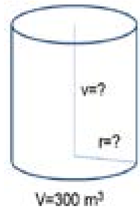


Manažer Chytrý: Ze studia na vysoké škole ví, že odhad funkce závislosti výšky stromu na obvodu kmene lze provést jednoduše v Excelu na základě předchozích měření pomocí příkazu „Přidat spojnici trendu“ v bodovém grafu. Pro odhad výšky stromu mu Excel navrhnul funkci $y = 64{,}168x^{0{,}5089}$. Pro zjednodušení zaměstnancům funkci ještě upravil do podoby $y = 64{,}168.\sqrt{x}$. Pokud tedy například bude mít strom ve výšce 1 m obvod 50 cm, jeho výška bude přibližně $y = 64{,}168.\sqrt{50}$ = 453,7 cm a není nutné strom složitě měřit. Dle kapitoly Definiční obory potřeboval ještě zkontrolovat, jaká x je možné do navržené funkce dosazovat. Protože pod odmocninou je možné použít pouze nezáporná čísla, definiční obor této funkce je $\mathrm{Df} = \langle 0;\infty)$. V jiných oblastech přírodních věd se vyskytují i komplikovanější funkce, u kterých může být výpočet definičního oboru někdy složitější. Jeho výpočet je však vždy podmínkou správného použití funkce.

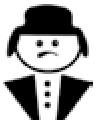
obvod kmene ve výšce 1 m v cm (x)	výška stromu v cm (y)
5	130
16	320
32	390
48	450
61	470



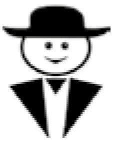
Příběh 2: Zakázka na válcové nádrže aneb jak vydělat pomocí derivace 1,5 mil Kč na Mercedes a luxusní dovolenou



Manažer získal dlouho očekávanou zakázku na výrobu 10 nádrží ve tvaru válce o objemu V = 300 m^3. Na tvaru válce zadavateli nezáleží. Hlavním vstupem do výroby je velmi drahý plech o ceně 2000 Kč/m^2, ze kterého jsou válcové nádrže vyráběny. Jaké mají mít válcové nádrže rozměry (poloměr r a výška v), aby povrch a tedy náklady na výrobu požadovaných 10 nádrží byly minimální?



Manažer Běžný: Ze školy uměl na hodinách nejrychleji ze všech derivovat, ale bohužel se nikdy nedozvěděl, že derivace se dají použít k minimalizaci či maximalizaci spousty praktických věcí. Navíc žije v domnění, že všechny válce o objemu 300 m^3 mají stejný povrch (tedy stejnou spotřebu plechu). Proto nařídí zaměstnancům, ať vyrábějí válce například s poloměrem r = 6 m a výškou v = 2,65 m, protože takové válce se mu líbí. Při těchto rozměrech bude mít každý válec povrch $P = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.v = 2.\ 3{,}14\ .\ 6^2 + 2.\ 3{,}14.\ 6.\ 2{,}65 = 325{,}93\ m^2$. Náklady na vyrobení 1 válce tedy budou 325,93 m^2 . 2000 Kč/m^2 = 651 860 Kč. Náklady na vyrobení 10 válců tedy budou 651 860 Kč . 10 = 6 518 600 Kč.



Manažer Chytrý: Ve sbírce příkladů z matematiky se na stránce 43 dozvěděl, že se pomocí derivací dá během chvíle spočítat, jaké má mít válec rozměry, aby byl jeho povrch minimální 🙂.

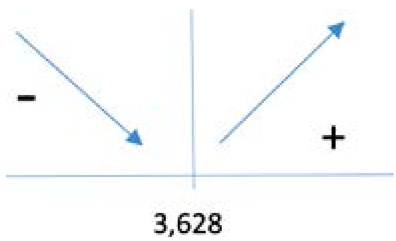
Stačí si sestavit funkci, kterou chceme minimalizovat (v našem případě) či maximalizovat. Vzorec pro povrch válce najdeme v tabulkách či na internetu a má tvar $P = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.v$. Do vzorce pro objem válce $V = \pi.r^2.v$ dosadíme požadovaný objem 300 m^3 ($300 = \pi.r^2.v$) a vyjádříme si proměnnou v ($v = \frac{300}{\pi r^2}$). Tu potom dosadíme za v do vzorce pro povrch ($P = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.\frac{300}{\pi r^2}$). Tuto funkci potom už jen upravíme, zderivujeme, položíme = 0 a vyjádříme z ní poloměr r:

$$P = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.\frac{300}{\pi r^2}$$

$$P = 2.\pi.r^2 + \frac{600}{r}$$

$$P' = 4.\pi.r - \frac{600}{r^2} = 0$$

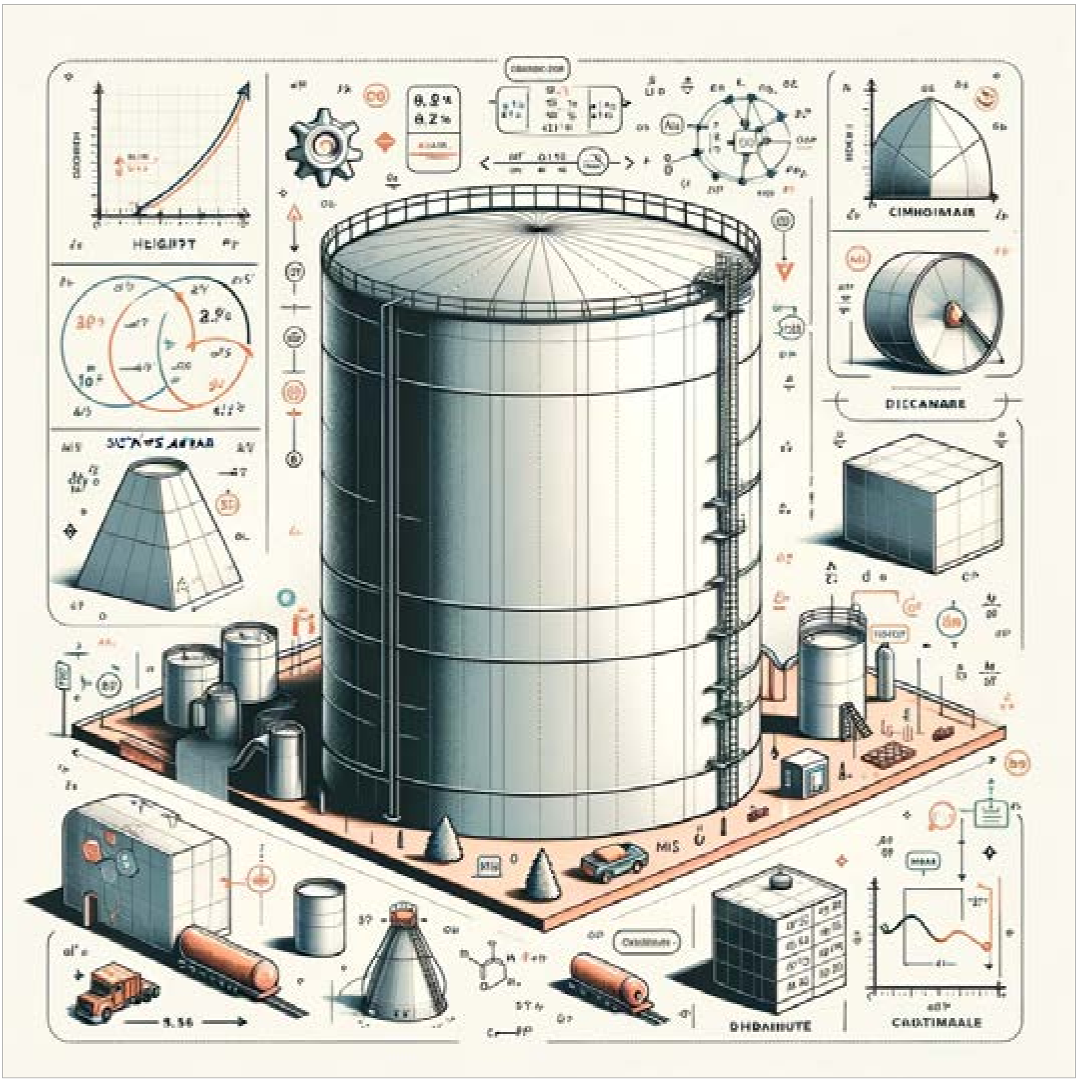
r = 3,628 m



Podle monotonie vidíme, že funkce je klesající na intervalu $\langle 0;3{,}628\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 3{,}628;\infty)$. V bodě 3,628 je tedy lokální minimum a spotřeba materiálu bude v tomto bodě minimální.

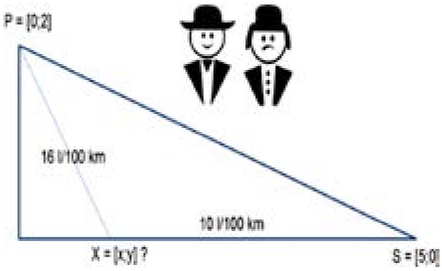
Dosadíme r = 3,628 m do vzorce pro výšku $v = \frac{300}{\pi r^2}$ a vypočteme v = 7,259 m. Při těchto optimálních rozměrech bude mít každý válec povrch $P = 2.\ 3{,}14\ .\ 3{,}628^2 + 2.\ 3{,}14.\ 3{,}628.\ 7{,}259 = 248{,}05\ m^2$. Náklady na vyrobení 1 válce tedy budou 248,05 m^2. 2000 Kč/m^2 = 496 100 Kč. Náklady na vyrobení 10 válců budou 496 100 Kč . 10 = **4 961 000 Kč**.

Oproti manažerovi Běžnému tedy manažer Chytrý ušetřil na uvedené **zakázce 6 518 600 Kč - 4 961 000 Kč = 1 557 600 Kč** a tato úspora jde na vrub znalosti derivací a matematiky 🙂. Manažer Chytrý si tedy koupí na konci zakázky oproti manažerovi Běžnému ještě nový Mercedes a pojede s rodinou na luxusní dovolenou k moři 🙂.



Příběh 3: Optimalizace trasy nákladních automobilů aneb jak ušetřit pohonné hmoty

Manažerova firma vlastní v bodě P = [0; 2 km] dle obrázku pískovnu, mezi ní a silnicí je louka, po které jezdí nákladní auta firmy se spotřebou 16 l/100 km. Osou x vede silnice, po které nákladní auta s pískem jezdí se spotřebou 10 l/100 km. Stavba je umístěna v bodě S = [5 km; 0]. Ve kterém bodě X na silnici (například za velkým stromem atd) se mají automobily napojit na silnici, aby spotřeba pohonných hmot byla minimální?



Manažer Běžný: Neví, že derivace se dají použít k minimalizaci délky trasy, takže nechává jezdit řidiče aut naprosto dle vlastního uvážení a netuší, že každý den přichází o slušnou sumu peněz, kterou zaplatí za naftu navíc.

Manažer Chytrý: S použitím derivace si spočítá přesný bod X, ve kterém je nejlepší se napojit z pole na silnici. Všem řidičům přikáže napojit se na silnici například u velkého křivého stromu, který je právě na vypočítaném nejlepším kilometru x. Každý den potom oproti manažerovi Běžnému ušetří částku v řádu několika stovek až tisíc korun za naftu. Jak si výsledek spočítal?

Vyjádříme si pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů potřebnou funkci spotřeby.

$d = 16 \cdot \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + 10. \sqrt{(5-x)^2 + (0-y)^2}$

protože bod X = [x,y] leží na ose x, můžeme dosadit za y = 0

$d = 16 \cdot \sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2} + 10. \sqrt{(5-x)^2 + (0-0)^2}$

$d = 16 \cdot \sqrt{x^2+4} + 10. (5-x)$

$d = 16 \cdot \sqrt{x^2+4} + 50 - 10x$

$d' = 16 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+4}} . 2x + 0 - 10 = 0$

$d' = \frac{16. x}{\sqrt{x^2+4}} - 10 = 0$

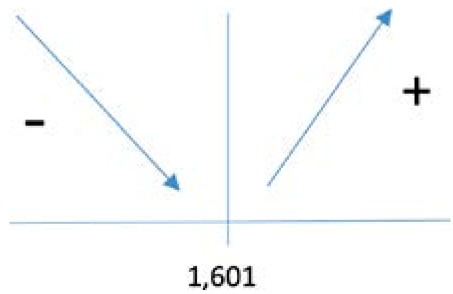
$16x = 10 \cdot \sqrt{x^2+4}$

$256. x^2 = 100. (x^2+4)$

$256. x^2 = 100. x^2 + 400$

$156. x^2 = 400$

$x = 1{,}601$

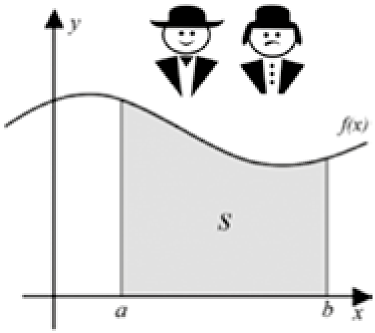


Podle monotonie vidíme, že funkce je klesající na intervalu $\langle 0;1{,}601 \rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 1{,}601;\infty)$. V bodě $1{,}601$ je tedy lokální minimum a spotřeba pohonných hmot tedy bude v tomto bodě minimální.

INTEGRÁLY

Příběh 4: Výpočet plochy nepravidelného pozemku pomocí určitého integrálu

Manažerova firma dostala nabídku k odkoupení rozsáhlého pozemku, který by podle informací realitní společnosti měl mít rozlohu 10 000 m^2 a cena je 4000 Kč/m^2, tedy celkem 40 mil Kč. Pozemek se manažerovi velmi líbí, ale plocha se mu zdá poněkud menší než udávaných 10 000 m^2. Pozemek má nepravidelný tvar, takže jeho plocha nejde spočítat běžnými vzorci pro plochu čtverce, obdélníku, kruhu, lichoběžníku atd, které zná ze ZŠ nebo jsou v tabulkách.



Manažer Běžný: Vzhledem k tomu, že plocha pozemku nemá žádný ze známých tvarů, které by si uměl manažer Běžný výpočtem ověřit, rozhodne se pozemek přesto koupit a zaplatí realitní společnosti požadovaných 40 mil Kč.

Manažer Chytrý: Po konzultaci se svým známým matematikem zjistí, že pole má tvar obrazce shora omezeného přibližně funkcí $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle a,b \rangle = \langle 0,30 \rangle$ a pomocí určitého integrálu si spočítá plochu pozemku o velikosti pouze 9 000 m^2.

$$P = \int_0^{30} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{30} = \frac{30^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9000\ m^2$$

„Chybějících“ 1000 m^2. 4000 Kč/m^2 = 4 mil Kč samozřejmě u realitní společnosti reklamuje a pozemek kupuje o 4 mil Kč levněji než manažer Běžný, tedy pouze za 36 mil Kč.

SOUSTAVY ROVNIC

Příběh 5: Výpočet jednotkové ceny sazenic stromků na základě celkových cen nákupů

Manažer zjistil podle účetních dokladů, že jeho firma před 3 lety udělala opakovaný nákup sazenic stromků dle následující struktury:

První den koupili 2 smrky, 4 borovice a 6 jedlí a zaplatili 620 Kč.

Druhý den koupili 3 smrky, 2 borovice a 5 jedlí a zaplatili 490 Kč.

Třetí den koupili 4 smrky, 6 borovic a 4 jedle a zaplatili 660 Kč.

Historické ceny dodavatele již nejsou dohledatelné. Z důvodu posouzení vývoje ceny během let potřebuje manažer zjistit, kolik stála před 3 lety jedna sazenice smrku, borovice a jedle.

Manažer Běžný: Zjistí, že jednotkové ceny sazenic staré 3 roky již nejsou k dohledání na internetu a smíří se s tím.

Manažer Chytrý: Cenu sazenice smrku označí x, cenu sazenice borovice označí y a cenu sazenice jedle označí z. Na základě informací o 3 různých nákupech sestaví soustavu 3 rovnic o 3 neznámých a tu vyřeší pomocí Gaussovy eliminace, nebo za pár vteřin pomocí aplikace v telefonu.

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 620 \\ 3x + 2y + 5z &= 490 \\ 4x + 6y + 4z &= 660 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 620 \\ 3 & 2 & 5 & 490 \\ 4 & 6 & 4 & 660 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 3 & 2 & 5 & 490 \\ 2 & 3 & 2 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & -4 & -4 & -440 \\ 0 & -1 & -4 & -290 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & -1 & -4 & -290 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & -3 & -180 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1x & 2y & 3z & 310 \\ 0 & 1y & 1z & 110 \\ 0 & 0 & -3z & -180 \end{array}\right)$$

$$-3z = -180; z = 60$$

$$1y + 1.60 = 110; y = 50$$

$$1y + 2.50 + 3.60 = 310; x = 30$$

Výsledné jednotkové ceny sazenic jsou: 1 sazenice smrku = 30 Kč, 1 sazenice borovice = 50 Kč, 1 sazenice jedle = 60 Kč.


LESY ČR
Podporujeme oborové vzdělávání

Název: Sbírka úloh z Matematiky pro FLD ČZU

Autor: RNDr. Marian Rybář

Vydavatel: Česká zemědělská univerzita v Praze

Schváleno ediční komisí FLD

Publikace prošla recenzním řízením.

Tisk: Tisk Kvalitně s.r.o.

Náklad: 100

Počet stran: 50

Vydání: první

Rok vydání: 2024

ISBN: 978-80-213-3360-4

Vydavatel: Česká zemědělská univerzita v Praze, Kamýcká 129, 165 00 Praha – Suchdol

Publikace vznikla za podpory Fakulty lesnické a dřevařské.

Tisk: Tisk Kvalitně s.r.o., Petržílkova 13, 158 00 Praha 13

Sbírka úloh z Matematiky pro FLD ČZU

RNDr. Marian Rybář

2024

9 788021 333604