

Česká zemědělská univerzita v Praze

Fakulta lesnická a environmentální

Matematické modelování procesů růstu
a produkce lesů

Disertační práce

Doktorand: Ing. Daniel Zahradník

Školitel: Prof. Ing. Jan Kouba, CSc.

2007

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma „Matematické modelování procesů růstu a produkce lesů“ zpracoval samostatně a použil jen pramenů, které uvádím v příloženém seznamu literatury.

Chtěl bych na tomto místě poděkovat svému školiteli prof. Ing. Janu Koubovi, CSc. za velkou trpělivost a mnoho cenných připomínek. Mgr. Ing. Michalu Křepelovi, PhD. vděčím za poskytnutí materiálů k historii teorie normálního lesa, RNDr. Vladimíru Pušovi, CSc. za mnohé ze statistiky a doc. Ing. Josefu Sequensovi, CSc. za podporu a konzultace k řadě otázek z hospodářské úpravy lesů.

Obsah

1. Úvod	5
2. Teorie normálního lesa	6
2.1 Klasická teorie normálního lesa	6
2.2 Teorie normálního lesa na základě náhodných procesů	11
3. Optimalizace převodu na normální les	19
3.1 Současný stav	19
3.2 Lineární programování	22
3.3 Obecná formulace úlohy lineárního programování pro proces vyrovnání věkové struktury	25
3.4 Úloha s těžebními plochami jako strukturními proměnnými	30
3.4.1 Soustava vlastních omezení	30
3.4.2 Rozsah úlohy	33
3.4.3 Účelová funkce	34
3.5 Úloha s plochami porostů jako strukturními proměnnými	37
3.5.1 Soustava vlastních omezení	37
3.5.2 Rozsah úlohy	39
3.5.3 Účelová funkce	39
3.6 Úloha s plochami porostů jako strukturními proměnnými – redukováná	41
3.6.1 Soustava vlastních omezení	41
3.6.2 Rozsah úlohy	42
3.6.3 Účelová funkce	42
3.7 Stochastické programování	43
4. Příklad	46
4.1 Vstupní parametry	46
4.2 Realizace výpočtu	54
4.3 Výsledky	55
5. Závěr	81
6. Literatura	83

1. Úvod

Počátkem 19. století byla formulována klasická teorie normálního lesa. Od té doby vznikla řada modifikací teorie, rozšiřujících její použití za hranice pasečného hospodářského způsobu, či zvyšujících realističnost úpravou jejich předpokladů, např. úvahou nahodilých těžeb. Hlavní principy klasické teorie, trvalost a vyrovnanost produkce lesa, však zůstávají zachovány a tvoří základ moderního lesního hospodářství.

Základní podmínkou nutnou pro dosažení proklamované trvalosti a vyrovnanosti produkce je normální věková struktura lesních porostů. V klasické teorii znamená normální struktura rovnoměrné rozdělení věkových stupňů. Při úvaze nevyhnutelných kalamitních těžeb pak docházíme k tomu, že mladší porosty by měly mít zastoupení větší než porosty starší. Současná věková struktura lesních porostů v České republice se však vyznačuje právě opačným poměrem – výrazným přebytkem starších porostů a nedostatkem mladších. Přiblížit věkovou strukturu porostů normálnímu stavu je tedy aktuálním úkolem hospodářské úpravy lesů.

Cílem předkládané disertační práce je rozvinutí metod optimálního řízení procesu vyrovnání věkové struktury do normálního stavu. Této problematice byla dosud v odborné literatuře věnována menší pozornost. Pionýrské práce v tomto směru publikovali Nautiyal a Pearse (1967) pro klasickou teorii normálního lesa a Kouba (1989) pro teorii normálního lesa na základě náhodných procesů. V předkládané práci jsou dříve navržené metody optimálního řízení přeformulovány do podoby umožňující jejich snadnou algoritmizaci a automatizované řešení pomocí výpočetní techniky. Především jsou však navrženy nové, jednodušší metody, umožňující podstatné rozšíření spektra kritérií optimality, podle nichž může být proces vyrovnání řízen. Dále je ukázána korespondence mezi jednotlivými metodami, díky níž lze pro jakkoli zvolené kritérium optimality použít vždy tu nejjednodušší z metod. Vlastní řešení optimalizačních úloh je provedeno pomocí spojitého lineárního programování a nově též pomocí stochastického lineárního programování. Pro automatizovanou formulaci těchto úloh byl vyvinut vlastní software.

2. Teorie normálního lesa

2.1. Klasická teorie normálního lesa

Základním cílem moderní hospodářské úpravy lesa je zajištění rovnoměrné a trvale udržitelné produkce lesů, jakož i plnění mimoprodukčních funkcí lesa. První snahy o splnění těchto cílů však lze vysledovat již v období středověku. Jako první písemný pramen se uvádí nařízení krále Zikmunda z roku 1426. Zde bylo vyžadováno, aby byla pro těžby na každý rok vyznačena souvislá plocha a po vytěžení zabezpečeno její opětovné zalesnění. Jedná se o první náznak lánové soustavy.

Historii vzniku *teorie normálního lesa* na území současné České republiky zpracoval Křepela (2002). Zřejmě nejstarším úředním pramenem, ve kterém jsou uvedeny zásady teorie normálního lesa je „Poučení ke zpracování katastru z 2. 10. 1785“. Toto „Poučení“ obsahovalo směrnice pro praktický výpočet výnosu z lesa pro účely zdanění lesní půdy v josefínském katastru.

Již v tereziánských lesních řádech však můžeme nalézt ustanovení, která regulují časovou úpravu lesa. Na Moravě bylo důležité ustanovení třetího bodu lesního řádu pro Moravu - každá vrchnost má povinnost netěžít ve svých lesích ročně víc než může nahradit očekávaný přírůst. Lesní řády pro Čechy a Slezsko v části: „O užívání lesů a vyměřování času, v němž se dříví porážeti má“, stanoví, že každý hospodář a držitel lesů si má od listopadu do února zaopatřit zásobu dříví na další rok a to podle velikosti svých lesů a jejich výnosu. Tato zásoba má být každoročně vyrovnaná. V těchto ustanoveních jsou obsaženy základní principy těžební regulace a to princip těžební nepřetržitosti a těžební vyrovnanosti. Dodržet citovaná ustanovení znamenalo vyměřit a rozdělit les, zjistit zásoby dřeva a vypočítat průměrný mýtní přírůst. Kontrolovat dodržení těchto ustanovení bylo možno až po sestavení josefínského katastru.

Při tomto výpočtu již byly použity pojmy charakterizující teorii normálního lesa: Průměrný mýtní přírůst (PMP), normální zásoba (*fundus instructus*) a skutečná zásoba. Plné znění tohoto „Poučení“ je obsaženo v *Handbuch aller unter der Regierung des Kaisers Josefs II. für die k.k. Erbländer ergangenen Verordnungen u. Gesetze in einer systematischen Verbindung* (1787): „Při provádění odhadu se předpokládá, že nebude vzat za základ nynější stav lesa, zda snad je skácen a k novému náletu určen, nebo zda snad má dříví mladé nebo konečně již vysokokmenné a zralé. Především jest třeba zkoumati, který druh dříví les dává

nebo dáti může, jaký je poměr dříví tvrdého k dříví měkkému, kolik potřebuje podle bonity půdy každý druh, aby dospěl k úplnému vzrůstu, kolik pak sáhů tento les poskytne v době mýtné a to na ploše celého, půl nebo čtvrt jitra a dále pak tímto způsobem na celé změřené výměře lesa. Ovšem se zřetelem na skalnatá či jinak neplodná místa. Výsledek získaný tímto způsobem je pak nutno spolehlivě zaznamenat. Přitom je třeba činit rozdíl mezi dřívím měkkým a tvrdým. Dále dělí se tento celkový počet sáhů každého druhu dříví počtem let, která jsou nutná k uzrání každého druhu. Výsledek pak jest jednoročním výnosem lesa a je jej třeba zaznamenat do příslušné rubriky fasse.“

Tato směrnice byla zřejmě částečně použita při sestavování dvorského dekretu z 12. 7. 1788 - Rakouská kamerální taxa. Princip výpočtu etátu podle Rakouské kamerální taxy je možno vyjádřit vzorcem:

$$E_S = PMP + \frac{Z_S - Z_N}{a}, \quad (2.1)$$

kde E_S je skutečný etát, PMP průměrný mýtní přírůst, Z_S zásoba skutečná, Z_N zásoba normální, a vyrovnávací doba. Tento vzorec představuje nejznámější vzorcovou metodu pro výpočet etátu.

Začátkem 19. století potom byla definována klasická teorie normálního lesa ve své konečné podobě (Hundeshagen (1826), Heyer (1841)). Pro hospodářskou skupinu stejnověkových porostů na stejnorodém stanovišti je požadováno splnění několika požadavků:

- normální zastoupení věkových tříd,
- normální prostorové uspořádání věkových tříd,
- normální přírůst,
- normální zásoba,
- normální etát.

Základním požadavkem zde je normální zastoupení věkových tříd. Uvažme lesní celek o plošné výměře P , jehož porosty jsou podle stáří rozděleny do n věkových tříd (stupňů, nebo obecně n časových intervalů, každý o stejné délce r). Normálním zastoupením tříd se potom myslí zastoupení rovnoměrné, tj. plocha každé třídy by měla být

$$P_i = \frac{P}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Předpokládá se, že založené porosty se bez poškození dožijí stanoveného věku obmýtí u ($u = nr$), poté jsou smýceny, vzniklá holina zalesněna a celý cyklus se opakuje znovu.

Za normální uspořádání věkových tříd se pokládá takové jejich prostorové rozmístění, které nejlépe vyhovuje podmínkám pěstování, ochrany a těžby lesa.

Normálním přírůstem se rozumí maximálně dosažitelný přírůst v daných podmínkách. Uvažme soubor porostů o u normálně zastoupených věkových ročnících. Zásobu porostů v i -tém ročníku označme v_i . Za dobu jednoho roku se porosty nyní náležící do i -tého ročníku přesunou do $i+1$ -ho ročníku. Poslední ročník je vytěžen a na jeho místě založen nový porost. Běžný roční přírůst celého souboru porostů

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} (v_{i+1} - v_i) + v_1 = v_u, \quad (2.3)$$

je tedy roven zásobě porostů posledního věkového ročníku. Je zřejmé, že současně se jedná také o průměrný mýtní přírůst.

Normální etát je dán pravidlem, že jeho výše na určité období musí být rovna přírůstu za toto období.

Konečně normální zásoba je součtem zásob všech přítomných porostů a je tedy důsledkem normality lesa.

Takto definovaný normální les zajišťuje vyrovnanou produkci a obvykle se předpokládá, že je nejvýhodnější jak po stránce ekonomické, tak po stránce plnění mimoprodukčních funkcí lesa. Ekonomickou výhodnost normálního lesa analyzovala řada autorů. Faustmann (1848) došel k závěru, že výše definovaný klasický normální les ekonomicky (z hlediska výše čisté současné hodnoty budoucích výnosů) nejvýhodnější vskutku je. Předpokládal však, že užitková funkce lesní produkce je lineární, čili že mezní užitek z každého vytěženého kubického metru je stále stejný. To však zjevně není pravda, mezní užitek s vytěženým množstvím dřeva klesá, jinými slovy užitková funkce není lineární, nýbrž konkávní. Podobného výsledného efektu je dosaženo rovněž za předpokladu, že výše produkce zkoumaného lesního celku je natolik vysoká, aby ovlivnila prodejní cenu dřeva. V této situaci závisí odpověď na otázku, zda je normální les ekonomicky optimální na řadě dalších okolností.

Mitra a Wan (1986) analyzovali model, v němž se čas, v němž probíhají hospodářská opatření, uvažuje jako diskrétní a prostor jako spojitý. Ukázali, že pokud nebereme do úvahy diskontování budoucích výnosů, existuje jediné ekonomicky optimální, dlouhodobě stabilní řešení, a to klasický normální les, nehledě na stav počáteční věkové struktury. V jiné studii Mitra a Wan (1985) na příkladech ukázali, že pokud vezmeme diskontování budoucích

výnosů do úvahy, normální les je stále optimální řešení, není to však řešení stabilní. Tento výsledek analyticky dokázal Wan (1994) po zjednodušení na model se dvěma věkovými třídami. Tímto modelem se později zabývali Salo a Tahvonen (2002a, 2003) a i po zobecnění na libovolný počet věkových tříd byli schopni analyticky dokázat, že klasický normální les s rovnoměrným rozdělením věkových tříd skutečně nemusí být jediným ekonomicky optimálním cílovým stavem. V závislosti na výchozím stavu věkové struktury jsou možná i jiná rozdělení věkových tříd. Důsledkem samozřejmě je, že i v cílovém stavu se věková struktura neustále dynamicky mění a ve výši produkce existují periodické výkyvy. Pokud se však délka časové jednotky, v níž se měří čas, zkracuje, výkyvy mizí a řešení konvergují ke klasickému normálnímu lesu.

Pro model s diskrétním časem i prostorem poté Salo a Tahvonen (2002b) dokázali stejná tvrzení.

Tahvonen (1998), Tahvonen a Salo (1999) a Tahvonen et al. (2001) také uvažovali model se spojitým časem a diskrétním prostorem. Analyticky prokázali, že pokud diskontní míra není „příliš vysoká“, je jediným optimálním řešením klasický normální les pro jakoukoli výchozí věkovou strukturu. Numerické simulace ukázaly značnou robustnost tohoto závěru pro široké rozpětí do úvahy připadajících diskontních měr.

Konečně variantu modelu se spojitým časem i prostorem řešil Heaps (1984). Vyslovil hypotézu, že v tomto případě je jediným optimálním řešením klasický normální les. Nalezl řadu náznaků platnosti této hypotézy, pro značnou komplikovanost problému však nebyl schopen podat analytický důkaz.

Prostor a čas jsou samozřejmě, alespoň podle současných představ, veličiny spojitě. Přesto jsou však dobré důvody, proč s nimi v lesnickém kontextu pracovat jako s diskrétními: hospodářská opatření nemohou probíhat na jednotce menší než jeden strom a díky sezónnosti růstu i těžeb je jeden rok přirozenou časovou jednotkou.

V klasické teorii normálního lesa je tedy třeba počítat s tím, že klasický normální les nemusí být jediným ekonomicky optimálním řešením, nýbrž mohou existovat i řešení s nerovnoměrným zastoupením věkových tříd a cyklickými výkyvy v produkci. Struktura těchto cyklů závisí na výchozí věkové struktuře a velikost jejich amplitudy na výši diskontní sazby.

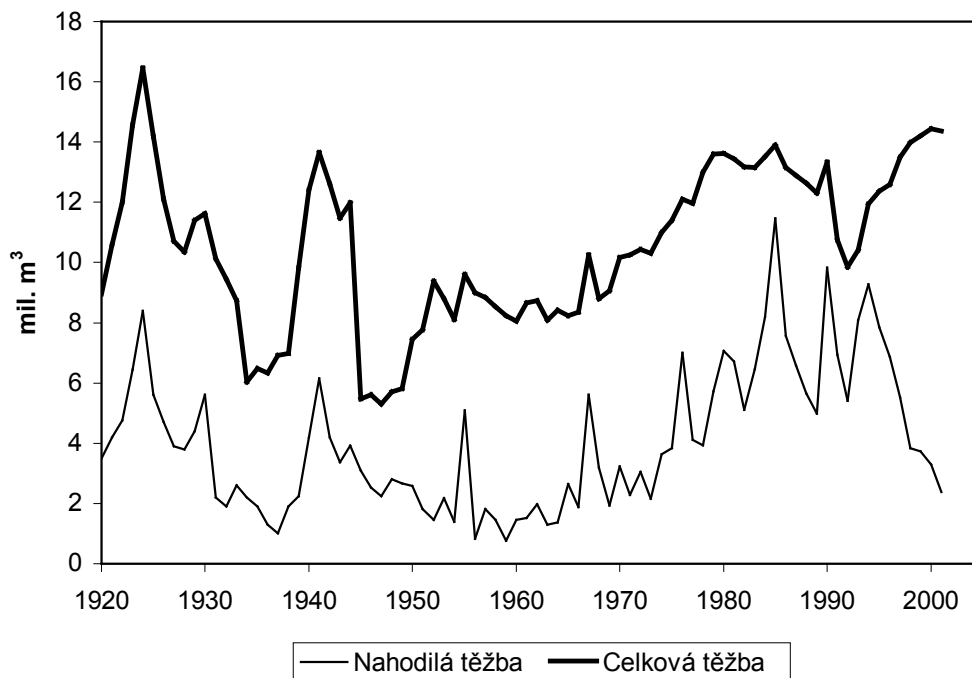
Situace se dále komplikuje, pokud uvažujeme soubor porostů, lišících se svým produkčním potenciálem a obmýtní dobou. Salo a Tahvonen (2002 b) ukázali, že délka cyklů

ve výkyvech výše produkce je potom rovna nejmenšímu společnému násobku obmýtních dob jednotlivých porostů. Platí také, že přidání každého dalšího porostu k stávajícímu souboru zmenší amplitudu výkyvů produkce celého souboru, ale zvýší ji u jednotlivých porostů. Stejně jako v případě jediného porostu platí, že s diskontní sazbou klesající k nule se ztrácí i cyklické výkyvy v produkci, neznamená to však, že potom věková struktura jednotlivých porostů souboru nutně musí být rovnoměrně rozdělená. Rovnoměrně rozdělená musí být pouze v případě, že délky obmýtních dob jednotlivých porostů nemají jiného společného dělitele než jedna.

Zásadním nedostatkem klasické teorie normálního lesa, a tedy i výše zmíněných ekonomických analýz, je však to, že neuvažují s výskytem nahodilých těžeb v porostech mladších než je doba obmýtní. Ve skutečnosti však tvoří nahodilé těžby velkou část těžeb celkových a velmi významně ovlivňují vývoj lesa. Jak bude dále ukázáno, teorii normálního lesa lze modifikovat tak, aby vliv nahodilých těžeb zahrnula. Novou vlastností takto modifikované teorie je, že vlivem nahodilých těžeb věková struktura porostů k normálnímu stavu samovolně konverguje. Precizní ekonomická analýza dosud nebyla provedena, lze však předpokládat, že v takové situaci se normální les stane jediným ekonomicky optimálním řešením.

Rozborem výskytu nahodilých těžeb v lesích České republiky se zabývala řada autorů. Obrázek č. 1 ukazuje vývoj velikosti nahodilých těžeb v ČR od roku 1920. Pro porovnání je také uveden vývoj těžeb celkových. Údaje byly publikovány Koubou (2001).

Je vidět, že podíl nahodilých těžeb se v daném období pohyboval v průměru kolem jedné třetiny, v určitých obdobích, zejména od poloviny osmdesátých let do poloviny let devadesátých, dosahoval až tří čtvrtin. Pfeffer (1961) uvádí příklady významných kalamit od počátku 19. století do poloviny 20. století o úhrnné výši 36 mil. m³ u škod způsobených větrem, 16 mil. m³ u škod sněhem a 2 mil. m³ zničených námrazou. Údaje z ještě vzdálenější historie zpracoval na základě starých českých kronik Kouba (1999).



Obr. 1. Vývoj výše celkových a nahodilých těžeb

2.2 Teorie normálního lesa na základě náhodných procesů

Je zřejmé, že kalamity tvoří nedílnou součást života porostů a s určitým podílem kalamitních těžeb bude třeba počítat vždy. Pokud je ovšem část porostů zničena před dosažením plánovaného mýtního věku, nelze dosáhnout, resp. dlouhodobě udržovat, rovnoměrné rozdělení věkových tříd. U kalamit předpokládáme jejich nahodilý charakter. Proto se řada autorů snažila o vybudování nové teorie normálního lesa na základech teorie náhodných procesů.

Kouba ve svých pracích z let 1973, 1977 a 1983 navrhl model založený na teorii *homogenních regulárních Markovových řetězců*. Předkládaná práce v podstatné míře tohoto modelu využívá, proto bude v druhé části sekce popsán podrobněji.

Později Kouba rozpracoval možnosti využití teorie *absorpčních Markovových řetězců*. Zde se stavy, v nichž se systém může nalézat, rozlišují na *absorpční* (jakmile se systém dostane do tohoto stavu, nemůže již přejít do stavu jiného) a *transientní* (pravděpodobnost výskytu systému v těchto stavech se s postupným vývojem blíží nule).

Kouba (1986 a 1987) navrhl využití této teorie pro modelování vývoje lesů nemocných, u nichž dochází k poklesu produkční schopnosti a obecně lesů v nichž dochází ke změnám dřevinné skladby.

Problému stanovení prvků matice pravděpodobností přechodu se věnoval Kouba v práci z roku 1989. Jsou zde vypracovány teoretické základy vyjádření a odhadu pravděpodobností zničení ploch lesních porostů v závislosti na věku ve spojitém i diskrétním vyjádření na základě *teorie spolehlivosti*. Pro vyjádření *funkce spolehlivosti*, tj. pravděpodobnosti, že porost nebude poškozen před uplynutím určitého času, je užito Weibullova rozdělení. Jsou uvedeny příklady reálných odhadů kalamit majících za následek vznik zalesňovací povinnosti a to: zničení lesních kultur, typické škody sněhem, škody větrem a škody vyplývající z vysokého věku a rovněž škody bez možnosti bližšího určení. Zmíněná metoda umožňuje výrazně zpřesnit a systematizovat teoretické základy odhadu a vyjádření pravděpodobností zničení lesních porostů.

V předchozích pracích bylo předpokládáno, že holina vzniklá z mýtní těžby (ať úmyslné či neúmyslné) je ihned zalesněna a její plocha je součástí první věkové třídy. Obecné řešení vyjadřující proces tvorby první věkové třídy uvádí Kouba (1991). Do úvahy je zde brána také doba předepsaná pro zalesnění holiny, úspěšnost zalesnění, proces vylepšování kultur a proces zařazení kultury či vzniklého mladého porostu do první věkové třídy. Uvedený postup je teoretickým základem pro rozbor procesů tvorby věkových tříd a umožňuje dále zpřesnit odhady pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými třídami.

Metody odhadu pravděpodobností zničení porostů Kouba (2002) dále rozpracoval a výsledky dovedl do formy „lesních úmrtnostních tabulek“ jako analogie úmrtnostních tabulek z demografie.

Přehled v oblasti vyhodnocování rizik v lesním hospodářství podává Gadow (2000). Shrnuje dosud používané metody odhadu rizika poškození lesních porostů biotickými i abiotickými činiteli, porovnává je s metodami používanými v jiných oblastech průmyslu a shledává nutnost jejich dalšího rozvoje.

Teorie Markovových řetězců a teorie obnovy byla pro modelování vývoje lesních porostů použita více autory. Například Suzuki (1981 a 1983) vychází z teorie spolehlivosti. Ve své teorii však neuvažuje s kalamitními těžbami, jako pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými věkovými třídami používá těžební podíly úmyslné mýtní těžby v příslušných věkových třídách.

Pojem pravděpodobnost zničení porostu nebyl v dosud publikované literatuře definován jednotným způsobem. Já budu uvažovat pravděpodobnost zničení tzv. *elementárního porostu*. Velikost elementárního porostu je na rozdíl od porostu v běžném hospodářsko-úpravnickém smyslu pevně stanovena. Měla by být dostatečně malá na to, aby bylo možné uvažovat o zničení porostu jako jednoho celku. Současně by měla být dostatečně velká pro praktické potřeby hospodářské úpravy. Podle vyhlášky č. 84/1996 Sb o lesním hospodářském plánování je nejmenší vylišovaná výměra porostních skupin 0,04 ha. Definujme tedy velikost elementárního porostu jako 0,04 ha.

Výskyt kalamity, jež zničí během určitého období elementární porost, lze chápat jako náhodnou veličinu s alternativním rozdělením s parametrem p (s pravděpodobností p se kalamita vyskytne, s pravděpodobností $1 - p$ nikoli). Uvažujme nyní lesní celek skládající se z n elementárních porostů. Předpokládejme, že pravděpodobnosti zničení p jsou pro všechny porosty stejné a na sobě nezávislé. Absolutní četnost x elementárních porostů zničených kalamitou potom bude náhodná veličina s binomickým rozdělením s parametry n a p . Pro velké n lze podle Moivre-Laplaceovy věty toto rozdělení aproximovat rozdělením normálním se střední hodnotou np a rozptylem $np(1 - p)$. Relativní četnost zničených porostů, tj. x/n , by potom měla také normální rozdělení, avšak se střední hodnotou p a rozptylem $p(1 - p)/n$. Jelikož jsou všechny elementární porosty stejně velké, lze ztotožnit jejich relativní četnost s podílem plochy, jíž v lesním celku zaujímají.

Kouba ve svých pracích z let 1973, 1977 a 1983 navrhl model normálního lesa založený na teorii homogenních regulárních Markovových řetězců. Výsledky získané pomocí tohoto modelu jsou součástí předkládané práce. Jedná se zejména o nově definované normální zastoupení věkových tříd. Věková struktura lesních porostů je v modelu popsána vektorem $\mathbf{a}^{(t)} = (a_i^{(t)})_{1 \leq i \leq n}$, jehož prvky $a_i^{(t)}$ tvoří pravděpodobnosti toho, že náhodně vybraný porost se v čase t nachází v i -té věkové třídě. Tyto pravděpodobnosti je možno interpretovat jako plošné podíly lesních porostů, nacházející se v příslušných věkových třídách. Pravidla, jimiž se řídí vývoj porostů, jsou shrnuta v *matici pravděpodobností přechodu* $\mathbf{P} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Prvky $p_{i,j}$ této matice představují pravděpodobnosti toho, že náhodně vybraný porost, nacházející se v i -té věkové třídě, se po uplynutí doby, jež je stejná jako rozpětí r věkové třídy, bude nacházet v j -té věkové třídě.

Předpokládejme, že porost nacházející se nyní v první věkové třídě bude během doby r zničen kalamitou s pravděpodobností $p_{1,1}$ a pokud se tak stane, bude vzniklá holina neprodleně znovu zalesněna. Po uplynutí celé doby r se tedy bude na dané ploše nacházet opět porost první věkové třídy. S pravděpodobností $p_{1,2} = 1 - p_{1,1}$ porost zničen nebude a přejde do druhé věkové třídy. Analogicky potom porost nacházející se nyní v druhé věkové třídě bude zničen s pravděpodobností $p_{2,1}$. Po opětovném zalesnění se bude v čase r na dané ploše nacházet opět porost první věkové třídy. S pravděpodobností $p_{2,3} = 1 - p_{2,1}$ porost zničen nebude a přejde do třetí věkové třídy. Stejná pravidla potom platí i pro porosty ostatních věkových tříd, kromě poslední, která je vytěžena celá. Matice pravděpodobností přechodů má tedy tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & 1-p_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{2,1} & 0 & 1-p_{2,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 1-p_{n-1,1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Klasickou teorii normálního lesa lze chápat jako speciální případ tohoto modelu, pokud položíme pravděpodobnosti předčasných nahodilých těžeb rovny nule:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Z teorie Markovových řetězců (viz. například Beyer (1982), Kemeny a Snell (1960) a Walter (1970)) vyplývá, že pokud je známé zastoupení věkových tříd v čase t , $\mathbf{a}^{(t)}$, lze jejich zastoupení po uplynutí doby o délce r , $\mathbf{a}^{(t+r)}$, vypočítat ze vztahu

$$\left(\mathbf{a}^{(t+r)}\right)^T = \left(\mathbf{a}^{(t)}\right)^T \mathbf{P}, \quad (2.6)$$

kde $\left(\mathbf{a}^{(t)}\right)^T$ je řádková forma vektoru $\mathbf{a}^{(t)}$.

Ze známého vývoje věkové struktury lze potom již snadno spočítat vývoj řady dalších zajímavých veličin, jako jsou:

1. Střední věk:

$$S^{(t)} = (\mathbf{a}^{(t)})^T \mathbf{s}, \quad (2.7)$$

kde \mathbf{s} je vektor, jehož prvky jsou střední věky příslušných věkových tříd.

2. Obmýtní doba:

$$U^{(t)} = \frac{(\mathbf{a}^{(t)})^T \mathbf{R} \mathbf{p}}{a_1^{(t)}}, \quad (2.8)$$

kde \mathbf{R} je diagonální matice s elementy $r, 2r, \dots, nr$ a \mathbf{p} je první sloupec matice \mathbf{P} .

3. Zásoba:

$$V^{(t)} = (\mathbf{a}^{(t)})^T \mathbf{v}, \quad (2.9)$$

kde \mathbf{v} je vektor, jehož prvky jsou jednotkové (hektarové) zásoby porostů jednotlivých věkových tříd.

4. Decennální (obecně za období odpovídající rozpětí věkové třídy) mýtní těžba:

$$E^{(t)} = (\mathbf{a}^{(t-1)})^T \mathbf{V} \mathbf{p}, \quad (2.10)$$

kde \mathbf{V} je diagonální matice s prvky vektoru \mathbf{v} .

5. Decennální předmýtní těžba:

$$D^{(t)} = (\mathbf{a}^{(t)})^T \mathbf{d}, \quad (2.11)$$

kde \mathbf{d} je vektor, jehož prvky jsou decennální výše probírek ve věkových třídách.

6. Celková decennální těžba:

$$GE^{(t)} = E^{(t)} + D^{(t)}. \quad (2.12)$$

7. Decennální přírůst:

$$I^{(t)} = V^{(t)} - V^{(t-1)} + E^{(t)}. \quad (2.13)$$

8. Celkový decennální přírůst:

$$GI^{(t)} = V^{(t)} - V^{(t-1)} + E^{(t)} + D^{(t)}. \quad (2.14)$$

Lze ukázat, že pokud je alespoň jedna z pravděpodobností $p_{i,1}$, $i=1, 2, \dots, n-1$, nenulová, je matice (2.4) *regulární*, což znamená, že existuje t takové, že matice \mathbf{P}^t má

pouze kladné prvky. Pokud lze navíc předpokládat, že pravděpodobnosti přechodů mezi jednotlivými věkovými třídami zůstávají v čase konstantní (jedná se tedy *homogenní řetězec*), platí, že pravděpodobnosti $\mathbf{a}^{(t)}$ postupně konvergují k určitému *stacionárnímu rozdělení* \mathbf{a} , které je nezávislé na výchozím stavu. Obecně se u regulárních matic \mathbf{P} toto rozdělení získá vyřešením soustavy rovnic $\mathbf{a}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}$. Pro matici speciálního tvaru (2.4) lze potom odvodit vzorec

$$a_i = \frac{\prod_{j=1}^{i-1} p_{j,j+1}}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} p_{j,j+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.15)$$

kde $\prod_{j=1}^0 p_{j,j+1}$ je definováno jako 1. Toto je tedy hledané zastoupení věkových tříd, které je při daném riziku kalamitních těžeb nejstabilnější. Vzorec (2.15) lze přeformulovat do rekurentní podoby

$$a_1 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} p_{j,j+1}},$$

$$a_i = a_{i-1} p_{i-1,i}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Protože pravděpodobnosti mohou nabýt velikosti pouze v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, je zřejmé že se vzrůstajícím věkem musí stacionární zastoupení věkových tříd tvořit nerostoucí posloupnost.

Z vypočítaného stacionárního rozdělení věkových tříd jsou poté odvozeny dlouhodobě stabilní hodnoty navazujících taxačních veličin:

střední věk

$$S = \mathbf{a}^T \mathbf{s}, \quad (2.16)$$

obmýtní doba

$$U = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{p}}{a_1}, \quad (2.17)$$

zásoba

$$V = \mathbf{a}^T \mathbf{v}, \quad (2.18)$$

decennální mýtní těžba

$$E = \mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{p}, \quad (2.19)$$

decennální předmýtní těžba

$$D = \mathbf{a}^T \mathbf{d}, \quad (2.20)$$

celková decennální těžba

$$GE = E + D, \quad (2.21)$$

decennální přírůst

$$I = E \quad (2.22)$$

a celkový decennální přírůst

$$GI = E + D. \quad (2.23)$$

Tím je definována nová teorie normálního lesa. Tato teorie uvažuje s vlivem nahodilých těžeb a lze jí tedy považovat za podstatně realističtější než teorii klasickou.

Je také možné (Walter, 1970) vypočítat matici *středních dob prvního přechodu* \mathbf{M} a matici *rozptylů středních dob prvního přechodu* \mathbf{V} .

$$\mathbf{M} = (\mathbf{E} - \mathbf{Z} + \mathbf{1}\mathbf{Z}_{\text{dg}})\mathbf{D}, \quad (2.24)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice, $\mathbf{1}$ je matice jejíž všechny elementy jsou rovny 1, \mathbf{Z}_{dg} je odvozena z fundamentální matice regulárního řetězce \mathbf{Z} nahrazením všech jejích nediagonálních elementů nulou, přičemž $\mathbf{Z} = (\mathbf{E} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}$, a \mathbf{D} je matice s prvky $d_{i,i} = 1/a_{i,i}$.

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}(2\mathbf{Z}_{\text{dg}}\mathbf{M}_{\text{dg}} - \mathbf{E}) + 2(\mathbf{Z}\mathbf{M} - \mathbf{1}(\mathbf{Z}\mathbf{M})_{\text{dg}}), \quad (2.25)$$

kde \mathbf{M}_{dg} a $(\mathbf{Z}\mathbf{M})_{\text{dg}}$ jsou opět odvozeny od matic \mathbf{M} a $\mathbf{Z}\mathbf{M}$ nahrazením všech jejích nediagonálních elementů nulou.

Prvky matice \mathbf{M} představují střední dobu, za níž se porosty dostanou z libovolné věkové třídy do třídy jiné. Obzvláštní význam má prvek $m_{1,1}$, tedy střední doba návratu do první věkové třídy, pokud se porost v první věkové třídě nachází nyní – tento prvek má tedy význam střední doby obmýti.

Kalamitní těžby mají samozřejmě vliv i na obmýti plánované. Optimální obmýti lze stanovit z mnoha hledisek. Zde ukažeme odvození obmýti na základě kvantitativní mýtní

zralosti v rámci teorie normálního lesa na základě náhodných procesů. Kvantitativní mýtní zralost porostů je obecně dána věkem, v němž nabývá svého maxima celkový průměrný přírůst. Podle (2.19), (2.20) a (2.23) je celkový přírůst za dobu jednoho decennia ve stacionárním stavu

$$GI = \mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{p} + \mathbf{a}^T \mathbf{d}.$$

Předpokládáme, že porosty si stacionární věkovou strukturu zachovají i v následujících decenniích a přírůst tak bude v každém decenniu stejný. Pro celkový průměrný přírůst (*CPP*) potom máme

$$CPP = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{p} + \mathbf{a}^T \mathbf{d}}{r}. \quad (2.26)$$

Počet věkových tříd ve stacionární věkové struktuře by tedy měl být stanoven tak, aby maximalizoval hodnotu (2.26).

3. Optimalizace převodu na normální les

3.1 Současný stav

Skutečná věková struktura lesních porostů se od stacionární struktury, definované v některé z forem normálního lesa, obecně odlišuje. Zatímco značná část lesnické literatury se zabývá hospodářskou úpravou lesů, jež v normálním stavu již jsou, poměrně malá pozornost byla dosud věnována procesu přechodu ze stavu současného do stavu normálního. V podstatě jedinou možností jak ovlivnit věkovou strukturu porostů je odpovídajícím způsobem zvolená těžební strategie. Lze ukázat, že věková struktura lesních porostů, v nichž se hospodaří prostřednictvím předem pevně daných předpisů o výši plošných podílů těžeb ve věkových stupních, ke stabilní struktuře konverguje. Tato konvergence je však značně pomalá. Jinou možností je aktivně řídit proces vyrovnání pomocí vhodně zvolených velikostí těžeb v jednotlivých věkových stupních pro každý jednotlivý krok vyrovnávacího procesu. Přitom se požaduje, aby proces vyrovnání probíhal optimálně, ve smyslu maximalizace některé pro nás zajímavé funkce, např. maximalizace celkové výše těžeb během procesu vyrovnání, maximalizace produkce určitého sortimentu, či maximalizace finančního výnosu. Otázkami s tím souvisejícími jsou určení optimální délky doby vyrovnání a optimální obmýtní doby.

Základní článek na téma procesu vyrovnání věkové struktury na strukturu normální publikovali Nautiyal a Pearse (1967). Problém je zde řešen pomocí metody lineárního programování s cílem navrhnout pro každý věkový stupeň a každý krok vyrovnávacího procesu optimální velikost těžební plochy. Řešení je hledáno v rámci omezujících podmínek dvou druhů. Za prvé, jak již z cíle úlohy vyplývá, na konci vyrovnávacího procesu musí rozdělení věkových stupňů nabýt normálních hodnot. Za druhé, v žádném věkovém stupni a žádném z kroků vyrovnávacího procesu nemůže být vytěžena plocha větší, než je v daný okamžik k dispozici. Průběh procesu je uvažován v rámci klasické definice normálního lesa podle Hundeshagena a Heyera. Z téhož důvodu se za cílový stav považuje věková struktura s rovnoměrným zastoupením věkových stupňů. Je hledáno řešení jež maximalizuje čistou současnou hodnotu výnosů z těžební činnosti během procesu vyrovnání. Pomocí simulování procesu vyrovnání pro jeho různé délky a pro různé cílové obmýtní doby je v článku také analyzován vliv těchto faktorů, jak samostatně, tak i v kombinaci, na čistou současnou hodnotu budoucích výnosů. Je ukázána vzájemná závislost délky doby vyrovnání a doby obmýtní.

Řešením tohoto problému se zabývali také Kouba a Kašparová (1988) a Kouba (1989). Základní myšlenka řízení procesu vyrovnání pomocí lineárního programování je stejná jako u Nautiyala a Pearse. Na rozdíl od nich však uvažují s existencí nahodilých těžeb. V důsledku toho je zde cílovým stavem rozdělení věkových stupňů podle teorie normálního lesa na základě náhodných procesů (Kouba, 1973, 1977, 1983). Rovněž přibyly další podmínky na průběh vyrovnávacího procesu. Velikost mýtní těžby v jednotlivých věkových stupních v každém z kroků vyrovnávacího procesu je možné volit v rámci určitého rozhodovacího prostoru. Tento prostor je zdola omezen očekávanou výší nahodilých těžeb v daném věkovém stupni. Shora je potom omezen zákonnými limity. Maximalizovanou veličinou je úhrnná výše těžeb během doby vyrovnání. Je také zkoumána otázka možného zkrácení obmýtní doby.

Na tyto práce navázali Kouba a Zahradník (2004a, 2004b) a Dvořáková a Zahradník (2005) a vypracovali algoritmus umožňující automatické sestavení výše popsané úlohy lineárního programování počítačem. Podrobnější popis metodiky, na níž je postup založen, je součástí předkládané práce.

Problémem vyrovnání stávající věkové struktury lesních porostů do normálního stavu se dále zabýval Holécý (1992, 1999). Použitou metodou je zde opět lineární programování. Maximalizovanou účelovou funkcí je čistá současná hodnota budoucích výnosů. V obou článcích jsou pro porovnání prezentovány výsledky optimalizace v případě bez úvahy nahodilých těžeb a s jejich úvahou. Odpověď na otázku, která z variant je ekonomicky výhodnější je značně citlivá na volbu parametrů. Je ukázáno, že pokud je předepsaná obmýtní doba vyšší než by bylo ekonomicky výhodné, může určitá výše nahodilých těžeb (které skutečnou obmýtní dobu zkracují) mít ekonomicky pozitivní efekt. Holécý (1994) také zkoumal možnost zmenšení rozsahu úloh lineárního programování prostřednictvím prodloužení rozpětí věkových stupňů a kroků vyrovnávacího procesu.

Király (1986) pro ekonomickou optimalizaci procesu vyrovnání stávající věkové struktury lesních porostů na normální stav použil kvadratické programování. Struktura normálního lesa zde není zahrnuta v omezujících podmínkách ale v cílové funkci. Cílová funkce má více složek s volitelnými vahami: již zmíněná vzdálenost věkové struktury od struktury normálního lesa, vzdálenost ploch těžeb v jednotlivých věkových třídách od ploch normálních a konečně rozdíl výše těžeb v jednotlivých krocích vyrovnávací doby. Hodnota cílové funkce se při tomto přístupu samozřejmě minimalizuje.

Buongiorno a Lin (1998) demonstrovali použití Markovových rozhodovacích procesů na příkladu návrhu optimální těžební regulace ve veřejných lesích státu Wisconsin. Pravidla pro těžbu v jednotlivých lesních typech jsou optimalizována vzhledem k dosažení maximální čisté současné hodnoty budoucích výnosů. Omezujícími podmínkami jsou mimoprodukční funkce lesa, zejména krajinná a porostní diverzita. Pro jejich vyjádření je použit Shannonův index. Je ukázáno, že Markovův rozhodovací proces je vhodnou metodou pro analyzování kompromisu mezi výnosem z hospodaření a mimoprodukčními funkcemi. Na jeho základě navržená těžební strategie umožňuje v popisovaném konkrétním příkladu výrazné (až pětinasobné) zvýšení výnosu při prakticky bezvýznamném omezení krajinné a druhové diverzity.

Buongiorno (2001) později navrhl použití metody zobecněných Markovových rozhodovacích procesů pro nalezení optimální těžební regulace v podmínkách existence kalamit, nepředvídatelných změn produkční schopnosti porostů, fluktuací v cenách produkce i v nákladech na hospodaření. Pro numerické řešení je potom možné použít metodu postupných aproximací, nebo metodu lineárního programování. Výsledkem je návrh věkových tříd jež by měly být těženy z hlediska maximalizace čisté současné hodnoty budoucích výnosů. Tento návrh je nezávislý na výchozím stavu a nevede k co možná nejrychlejší normalizaci věkové struktury. Jedná se v podstatě o určení optimální doby obmýtní v podmínkách rizika. Věková struktura se potom vyvíjí jako u neřízeného Markovova řetězce. Je dokázáno, že v přítomnosti rizika nahodilých těžeb nebo nejistoty cen musí být obmýtní doba kratší než by byla v bezrizikovém deterministickém případě.

Burgess (2001) analyzoval z hlediska čisté současné hodnoty budoucích výnosů situaci, kdy během růstu porostu dojde ke změně ekonomických podmínek. Zabýval se zejména otázkou výhodnosti předčasného smýcení původních porostů a jejich nahrazení porosty typu lépe vyhovujícího novým podmínkám a určením optimálního okamžiku pro tuto změnu.

Stanovením optimální obmýtní doby z hlediska maximalizace čisté současné hodnoty budoucích výnosů v případě, že ceny produkce nejsou stálé se zabýval také Thomson (1992). Pro modelování vývoje cen použil logaritmicko-normální difúzní proces. Je ukázáno, že pokud se nepředpokládá žádný trend, ale uvažuje se pouze s fluktuacemi cen, vychází optimální obmýtní doba kratší než v deterministickém případě.

Stanovením optimální obmýtní doby, či obecněji, optimálního způsobu těžební regulace v podmínkách nejistoty budoucího vývoje cen se zabývala řada autorů. Pro modelování vývoje cen přitom bylo použito více různých stochastických modelů. Malá pozornost však dosud byla věnována posouzení vhodnosti jednotlivých modelů v daném kontextu. Touto otázkou se zabývali Yoshimoto a Shoji (2002). Shrnuli 13 nepoužívanějších spojitých modelů vývoje cen a analyzovali jejich schopnost vystihnout skutečná data z historických záznamů o tržních cenách dřeva. Na tomto základě jako nejpřesnější model určili zobecněný stochastický model s lineární trendovou složkou a mocninnou difúzní složkou.

Jak bylo již dříve zmíněno, optimalizace věkové struktury pomocí spojitého lineárního programování je numericky značně náročná. Pokud by současně byla navíc optimalizována i struktura prostorová (prostorové rozmístění těžebních ploch), bylo by nutné použít celočíselné, či smíšené (Rebain a McDill, 2003) verze metody lineárního programování a problém výpočetní složitosti by se u rozsáhlých projektů stal neúnosným. Možným řešením je pro optimalizaci použít heuristických algoritmů namísto algoritmů přesných. Nové verze těchto algoritmů, vykazující výhodné vlastnosti při řešení uvedených problémů, navrhuje Reeves a Haight (2000) a Hasle et al. (2000).

3.2 Lineární programování

Ve své práci budu navazovat zejména na výsledky dosažené Nautiyalem a Pearsem (1967), Koubou (1988,1989), Koubou a Zahradníkem (2004a, 2004b) a Dvořákovou a Zahradníkem (2005). Hlavní použitou metodou je zde spojitě lineární programování. Obecně řečeno, jde o soubor metod sloužících k nalezení extrému (maxima či minima) určité funkce, přičemž množina, na níž je řešení hledáno, je omezena řadou podmínek. Konkrétněji, chceme nalézt takové řešení soustavy lineárních rovnic, či nerovnic

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{i=1}^n q_{1,i} x_i & R_1 & b_1 \\
\sum_{i=1}^n q_{2,i} x_i & R_2 & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{i=1}^n q_{m,i} x_i & R_m & b_m
\end{array}, \quad \text{resp. } \mathbf{Qx R b}, \quad (3.1)$$

(symbol R_i představuje některé z relačních znamének $\leq, =, \geq$) jež bude nezáporné

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (3.2)$$

a pro něž lineární funkce

$$z = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.3)$$

nabude maximální nebo minimální hodnoty.

Soustava (3.1) se nazývá *soustava vlastních omezení*. Nerovnosti (3.2) představují v úlohách lineárního programování standardní *podmínky nezápornosti* a funkce (3.3) se nazývá *úcelová funkce*.

Uvažme nyní nějaký přírodní, či technický proces. V našem konkrétním případě oním procesem bude postupné vyrovnání věkové struktury určitého lesního celku do stavu normálního. Označme $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor proměnných, charakterizujících vhodným způsobem průběh procesu. Samotný proces lze realizovat mnoha způsoby (v případě spojitéch proměnných \mathbf{x} nekonečně mnoha způsoby). Předpokládejme dále, že existuje veličina $z = f(\mathbf{x})$, představující pro nás jistým způsobem zajímavou charakteristiku procesu (úhrn mýtních těžeb, produkce určitého sortimentu, finanční výnos, hodnota některého ukazatele mimoprodukčních funkcí lesa apod.). Naším cílem je určit průběh procesu (tedy hodnoty proměnných x_1, x_2, \dots, x_n) tak, aby maximalizoval (či minimalizoval) hodnotu z . Koeficienty \mathbf{c} v účelové funkci mohou mít různý fyzikální nebo ekonomický význam, přesto se pro ně obecně používá název *cenové koeficienty*, či krátce *ceny*.

Hodnoty proměnných \mathbf{x} mohou být, ať již jednotlivě či v kombinacích, omezeny řadou podmínek. Koeficienty b_1, b_2, \dots, b_m na pravé straně vlastních omezení obecně charakterizují disponibilní kapacitu určitého zdroje. V našem případě to mohou velikosti ploch porostů určitého věku, v určitý okamžik vyrovnávacího procesu. Koeficienty $q_{i,j}$

představují míru využití i -tého zdroje na jednotku j -té složky zkoumaného procesu. Nazývají se *strukturní koeficienty* a jimi vytvořená matice *strukturní matice*.

Soustava vlastních omezení (3.1) může obsahovat podmínky, které jsou vzájemně rozporné. V tom případě úloha nemá žádné řešení. Může nastat také opačná situace, kdy množina řešení úlohy je neomezená. V ostatních případech je množina řešení ohraničena n -rozměrným konvexním polyedrem. Lze ukázat, že účelová funkce nabývá svého extrému v krajním bodu tohoto polyedru. Nabývá-li svého extrému ve více než jednom bodu, pak také i v libovolném bodu ležícím na jejich spojnici. Krajních bodů polyedru je u rozsáhlých úloh velké množství a prosté srovnání hodnot účelové funkce pro všechny krajní body by bylo neúnosné. Existuje však řada metod umožňujících nalezení optimálního řešení v rozumném čase. Nejpoužívanější z nich je *simplexová metoda*.

Duálně sdružená úloha lineárního programování

Soustava vlastních omezení (3.1) obecně obsahuje relační znaménka $\leq, \geq, =$. Soustavu lze upravit tak aby obsahovala pouze relační znaménka \leq . Omezení tvaru $\sum_{i=1}^n q_{j,i} x_i \geq b_j$ se vynásobí číslem -1 . Výsledkem bude omezení $-\sum_{i=1}^n q_{j,i} x_i \leq -b_j$. Rovnost $\sum_{i=1}^n q_{j,i} x_i = b_j$ lze rozložit do dvou nerovností $\sum_{i=1}^n q_{j,i} x_i \leq b_j$ a $-\sum_{i=1}^n q_{j,i} x_i \leq -b_j$. V takto modifikované formulaci úlohy bude naším cílem maximalizovat funkci

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.4)$$

při omezeních

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (3.5)$$

a

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

K této úloze lze zformulovat sdruženou, tzv. *duální úlohu*. V té je cílem minimalizovat funkci

$$z = \mathbf{u}^T \mathbf{b} \quad (3.7)$$

při omezeních

$$\mathbf{u}^T \mathbf{Q} \geq \mathbf{c}^T \quad (3.8)$$

a

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Lze dokázat, že pokud má výchozí (primární) úloha lineárního programování optimální řešení, má i úloha k ní duálně sdružená optimální řešení a hodnoty obou účelových funkcí jsou stejné.

Význam *duálních proměnných* \mathbf{u} spočívá v tom, že udávají oč se zvýší hodnota účelové funkce úlohy, zvýší-li se velikost disponibilní kapacity příslušného zdroje (příslušného koeficientu \mathbf{b}) v primární úloze o jednotku. Lze je tedy chápat jako mezní ceny (vyjádřené ve stejných jednotkách jako je účelová funkce) jednotlivých zdrojů, neboli maximální ceny, za které by se ještě vyplatilo zajistit dodatečné zdroje, popřípadě minimální ceny za než by bylo možné snížit kapacitu zdrojů. Z těchto důvodů se duálním proměnným také říká *stínové ceny*. Význam stínových cen je relativní. Vypočítaná cena platí pouze pro danou úlohu. Pokud tedy například v reakci na stínové ceny upravíme zadání úlohy natolik, že její základní řešení se změní, mohou se změnit také stínové ceny jednotlivých zdrojů.

3.3 Obecná formulace úlohy lineárního programování pro proces vyrovnání věkové struktury

V dalším textu budeme používat následující značení. Změna současné věkové struktury proběhne v n krocích. Délka jednoho kroku je přitom stejná jako je rozpětí r jednoho věkového stupně. Toto rozpětí může být libovolné, v praxi se však bude zřejmě obvykle používat standardní délka věkového stupně, tedy deset let. Z toho důvodu budu pro jednotlivé kroky vyrovnávacího procesu používat také název *decennium*. Maximální počet věkových stupňů, jenž se vyskytne ve výchozí věkové struktuře, cílové struktuře, či průběhu vyrovnávání, bude m . Relativní velikost plochy porostů i -tého věkového stupně vzhledem k ploše celého uvažovaného lesního celku na začátku j -tého kroku vyrovnávacího procesu je označena jako a_i^j . Stručně ji budeme nazývat *plocha porostů*. Plochy a_i^1 , $i = 1, 2, \dots, m$, tedy označují výchozí rozdělení věkových stupňů, plochy a_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, m$, potom rozdělení na konci vyrovnávacího procesu (na začátku $n+1$ kroku, neboli po provedení posledního,

n -tého, kroku). Budeme požadovat, aby toto rozdělení bylo stejné jako stacionární rozdělení věkových stupňů a_i , $i = 1, 2, \dots, m$, určené vztahem (2.15). Pokud bude z porostů patřících na začátku j -tého kroku do i -tého věkového stupně v průběhu decennia odtěžena nějaká plocha (bez ohledu na to, zda úmyslně, či nikoliv), bude její relativní velikost (vzhledem k lesnímu celku) označena x_i^j a stručně ji budeme nazývat *těžební plocha*.

Plochy porostů a_i^j a těžební plochy x_i^j spolu souvisí. Pokud známe plochy porostů na začátcích decenníí, lze snadno dopočítat velikosti těžebních ploch. Naopak to platí samozřejmě také. Tyto přepočty budou v dalším textu neustále zapotřebí, rozeberme je proto nyní důkladněji.

Předpokládejme nejprve, že potřebujeme zjistit velikost plochy odtěžené v průběhu j -tého decennia z porostů patřících na začátku decennia do i -tého věkového stupně. Pokud se jedná o porosty posledního věkového stupně ($i = m$), musí být vytěženy všechny, tedy

$$x_m^j = a_m^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

V případě, že se jedná o porosty některého z mladších věkových stupňů, může z nich být v průběhu decennia odtěžena obecně libovolná část. Případné zbývající porosty budou po uplynutí decennia náležet do vyššího věkového stupně. Těžební plocha je tedy dána rozdílem

$$x_i^j = a_i^j - a_{i+1}^{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, m-1. \quad (3.11)$$

Podobná úvaha se využije i v opačné úloze – určení plochy porostů ze známých těžebních ploch. Plocha porostů prvního věkového stupně na začátku j -tého decennia je dána součtem všech porostů založených na plochách odtěžených v průběhu předchozího decennia (předpokládá se, že vytěžené plochy jsou bezprostředně zalesněny):

$$a_1^j = \sum_{i=1}^m x_i^{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, n+1. \quad (3.12)$$

Pro plochy porostů druhého a všech vyšších věkových stupňů zjevně platí

$$a_i^j = a_{i-1}^{j-1} - x_{i-1}^{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, n+1, \quad i = 2, 3, \dots, m. \quad (3.13)$$

Požadujeme-li vyjádření velikosti ploch porostů pouze pomocí těžebních ploch (a výchozího rozdělení ploch věkových stupňů), je situace složitější. Přehled je podán v tab. 2.

Tab. 2 Vztahy mezi velikostí těžebních ploch a plochami porostů ve věkových stupních v průběhu vyrovnávacího procesu.

		Věkový stupeň					
		1	2	3	4	...	m
Krok vyrovnávacího procesu	1	a_1^1	a_2^1	a_3^1	a_4^1	...	a_m^1
	2	$a_1^2 = \sum_{k=1}^m x_k^1$	$a_2^2 = a_1^1 - x_1^1$	$a_3^2 = a_2^1 - x_2^1$	$a_4^2 = a_3^1 - x_3^1$...	$a_m^2 = a_{m-1}^1 - x_{m-1}^1$
	3	$a_1^3 = \sum_{k=1}^m x_k^2$	$a_2^3 = a_1^2 - x_1^2 =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^1 - x_1^2$	$a_3^3 = a_2^2 - x_2^2 =$ $= a_1^1 - \sum_{k=1}^2 x_k^k$	$a_4^3 = a_3^2 - x_3^2 =$ $= a_2^1 - \sum_{k=2}^3 x_k^{k-1}$...	$a_m^3 = a_{m-1}^2 - x_{m-1}^2 =$ $= a_{m-2}^1 - \sum_{k=m-2}^{m-1} x_k^{k-m+3}$
	4	$a_1^4 = \sum_{k=1}^m x_k^3$	$a_2^4 = a_1^3 - x_1^3 =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^2 - x_1^3$	$a_3^4 = a_2^3 - x_2^3 =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^1 - \sum_{k=1}^2 x_k^{k+1}$	$a_4^4 = a_3^3 - x_3^3 =$ $= a_1^1 - \sum_{k=1}^3 x_k^k$...	$a_m^4 = a_{m-1}^3 - x_{m-1}^3 =$ $= a_{m-3}^1 - \sum_{k=m-3}^{m-1} x_k^{k-m+4}$
		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	n	$a_1^n = \sum_{k=1}^m x_k^{n-1}$	$a_2^n = a_1^{n-1} - x_1^{n-1} =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^{n-2} - x_1^{n-1}$	$a_3^n = a_2^{n-1} - x_2^{n-1} =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^{n-3} - \sum_{k=1}^2 x_k^{k+n-3}$	$a_4^n = a_3^{n-1} - x_3^{n-1} =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^{n-4} - \sum_{k=1}^3 x_k^{k+n-4}$...	$a_m^n = a_{m-1}^{n-1} - x_{m-1}^{n-1}$
	$n+1$	$a_1^{n+1} = \sum_{k=1}^m x_k^n$	$a_2^{n+1} = a_1^n - x_1^n =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^{n-1} - x_1^n$	$a_3^{n+1} = a_2^n - x_2^n =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^{n-2} - \sum_{k=1}^2 x_k^{k+n-2}$	$a_4^{n+1} = a_3^n - x_3^n =$ $= \sum_{k=1}^m x_k^{n-3} - \sum_{k=1}^3 x_k^{k+n-3}$...	$a_m^{n+1} = a_{m-1}^n - x_{m-1}^n$

Jak vidno, podle kombinace věkového stupně a kroku vyrovnávacího procesu je plocha a_i^j dána dvěma různými způsoby. Pokud je číslo věkového stupně stejné, nebo větší, než číslo vyrovnávacího kroku, jedná se o porosty, které existovaly již před začátkem procesu vyrovnání. V tabulce 2 se tyto případy nacházejí v buňkách zvýrazněných šedou barvou. Vzorce zde uvedené lze zobecnit do tvaru

$$a_i^j = a_{i-j+1}^1 - \sum_{k=1}^{j-1} x_{i-j+k}^k, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i = j, j+1, \dots, m. \quad (3.14)$$

Pokud je naopak číslo věkového stupně menší než číslo vyrovnávacího kroku, jedná se o porosty, které vznikly až v průběhu vyrovnávacího procesu zalesněním ploch po vytěžených porostech. Vzorce pro výpočet plochy se potom v tabulce 2 nacházejí pod hlavní diagonálou a jejich zobecněný tvar je

$$a_1^j = \sum_{k=1}^m x_k^{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (3.15)$$

a

$$a_i^j = \sum_{k=1}^m x_k^{j-i} - \sum_{k=1}^{i-1} x_k^{j-i+k}, \quad j = 3, 4, \dots, n, \quad i = 2, 3, \dots, \min(m, j-1). \quad (3.16)$$

Samotnou úlohu lineárního programování lze zformulovat dvěma způsoby – v roli strukturálních proměnných mohou vystupovat buď velikosti těžebních ploch, nebo plochy věkových stupňů. Na první pohled by se mohlo zdát, že každá z variant bude vhodná pro řešení jiných optimalizačních úloh. V dalším textu však bude ukázáno, že prostřednictvím vhodně sestavené účelové funkce lze obě formulace na sebe vzájemně převádět.

Ať již zvolíme kteroukoli z formulací, bude soustava vlastních omezení složena z podmínek stejného významu. Triviálním omezením je, že nikdy není možné odtěžit plochu „menší než žádnou“, tedy $x_i^j \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, resp. $a_i^j - a_{i+1}^{j+1} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Podobně není nikdy možné vytěžit více než je v daný okamžik k dispozici: $x_i^j \leq a_i^j$, resp. $a_i^j - a_{i+1}^{j+1} \leq a_i^j$. Tyto podmínky jsou v podstatné míře dány výchozí věkovou strukturou. Omezení však mohou být i přísnější. V některých věkových stupních můžeme vyžadovat určitý minimální podíl těžeb. Ten může být dán například očekávaným podílem těžeb nahodilých. Označme l_i^j ($0 \leq l_i^j \leq 1$) minimální podíl, který bude v průběhu j -tého decennia odtěžen z porostů i -tého věkového stupně. Původní

omezení potom bude modifikováno do tvaru $x_i^j = a_i^j - a_{i+1}^{j+1} \geq l_i^j a_i^j$. Analogicky nemusí být v některých věkových stupních povoleno vytěžit všechny přítomné porosty, ale pouze jejich část o velikosti u_i^j . Horní omezení velikosti těžeb tak získá tvar $x_i^j = a_i^j - a_{i+1}^{j+1} \leq u_i^j a_i^j$.

Další omezení pro strukturní proměnné potom vyplývají z požadavku dosažení cílového rozdělení věkových stupňů na konci vyrovnávacího procesu.

3.4 Úloha s těžebními plochami jako strukturními proměnnými

V této formulaci optimalizační úlohy jsou jako strukturní proměnné použity těžební plochy x_i^j . Dále popsáný model vychází z prací Kouby (1988, 1989). Formulaci Nautiyala a Pearse (1967) lze chápat jako speciální případ, pokud $l_i^j = 0$, $u_i^j = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Zmínění autoři ve svých pracích uvažovali účelovou funkci závislou bezprostředně na strukturních proměnných úlohy. V sekci 3.4.3 bude ukázáno, že v rámci této formulace je také možné hledat řešení optimální vzhledem k veličinám závislým na plochách věkových stupňů a_i^j , popřípadě na kombinaci těžebních ploch a ploch věkových stupňů.

3.4.1 Soustava vlastních omezení

Soustava vlastních omezení úlohy se skládá z řady podmínek. Ty lze rozdělit do několika typů. První skupina podmínek bude zajišťovat, aby se velikosti těžebních ploch v jednotlivých věkových stupních a krocích vyrovnávacího procesu pohybovaly v přípustných mezích. Velikosti těžebních ploch musí obecně splňovat následující nerovnosti:

$$l_i^j a_i^j \leq x_i^j \leq u_i^j a_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Podle kombinace čísla věkového stupně a decennia vyrovnávacího procesu to bude dáno jedním ze dvou typů podmínek.

Podmínky I. typu

Pokud je pořadové číslo věkového stupně stejné nebo vyšší než pořadí aktuálního kroku procesu vyrovnání (tj. $j \leq i \leq m$), jedná se o porosty existující již před začátkem procesu vyrovnání. Pro první decennium je formulace podmínek pro přípustnou velikost těžebních ploch jednoduchá, neboť plochy porostů na začátku decennia (a_i^1) jsou známy:

$$\left. \begin{array}{l} x_i^1 \geq l_i^1 a_i^1 \\ x_i^1 \leq u_i^1 a_i^1 \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.18)$$

Plochy porostů pro následující decennia je nutno dopočítat pomocí vzorce (3.14). Po dosazení do (3.17) potom dostaneme

$$\left. \begin{array}{l} x_i^j \geq l_i^j \left(a_{i-j+1}^1 - \sum_{k=1}^{j-1} x_{i-j+k}^k \right) \\ x_i^j \leq u_i^j \left(a_{i-j+1}^1 - \sum_{k=1}^{j-1} x_{i-j+k}^k \right) \end{array} \right\} \quad j = 2, 3, \dots, n., \quad i = j, j+1, \dots, m$$

a konečný tvar podmínek tedy bude

$$\left. \begin{array}{l} x_i^j + l_i^j \sum_{k=1}^{j-1} x_{i-j+k}^k \geq l_i^j a_{i-j+1}^1 \\ x_i^j + u_i^j \sum_{k=1}^{j-1} x_{i-j+k}^k \leq u_i^j a_{i-j+1}^1 \end{array} \right\} \quad j = 2, 3, \dots, n., \quad i = j, j+1, \dots, m. \quad (3.19)$$

Podmínky II. typu

Pokud je naopak číslo věkového stupně menší než pořadí vyrovnávacího kroku ($i < j$), jedná se o porosty vzniklé zalesněním po těžbách v $(j-i)$ -tém kroku vyrovnávacího procesu. Velikost jejich plochy lze vypočítat ze vzorce (3.15), resp. (3.16). Po dosazení do (3.17) a úpravě získáme pro velikost těžeb následující podmínky:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^j - l_1^j \sum_{k=1}^m x_k^{j-1} \geq 0 \\ x_1^j - u_1^j \sum_{k=1}^m x_k^{j-1} \leq 0 \end{array} \right\} \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (3.20)$$

pro porosty prvního věkového stupně a

$$\left. \begin{aligned} x_i^j - l_i \left(\sum_{k=1}^m x_k^{j-i} - \sum_{k=1}^{i-1} x_k^{k+j-i} \right) &\geq 0 \\ x_i^j - u_i \left(\sum_{k=1}^m x_k^{j-i} - \sum_{k=1}^{i-1} x_k^{k+j-i} \right) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad j = 3, 4, \dots, n., \quad i = 2, 3, \dots, \min(j-1, m). \quad (3.21)$$

pro porosty vyšších stupňů.

Nakonec je třeba zajistit, aby po posledním kroku vyrovnávacího procesu měly plošné podíly jednotlivých věkových stupňů požadovanou cílovou velikost (tj. $a_i^{n+1} = a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$). Jsou zde opět podmínky dvou typů.

Podmínky III. typu

Pokud formulujeme podmínky pro velikost těžebních ploch ve věkovém stupni, jehož pořadové číslo je větší než je počet decenií vyrovnávacího procesu ($i > n$), jedná se o porosty existující již před zahájením vyrovnávacího procesu. Jejich velikost na konci vyrovnávacího procesu je podle vzorce (3.14)

$$a_i^{n+1} = a_{i-n}^1 - \sum_{k=1}^n x_{i-n+k-1}^k, \quad i = n+1, n+2, \dots, m,$$

musí tedy platit

$$\sum_{k=1}^n x_{i-n+k-1}^k = a_{i-n}^1 - a_i, \quad i = n+1, n+2, \dots, m. \quad (3.22)$$

Podmínky IV. typu

Pokud je pořadové číslo věkového stupně menší nebo rovno počtu decenií vyrovnávacího procesu, jsou příslušné porosty pozůstatkem porostů založených po těžbách provedených v $(n-i+1)$ -tém decenniu. Jejich velikost na konci vyrovnávacího procesu je dána vzorcí (3.15), resp. (3.16). Podmínky tedy zní

$$\sum_{k=1}^m x_k^n = a_1 \quad (3.23)$$

pro první věkový stupeň a

$$\sum_{k=1}^m x_k^{n-i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} x_k^{n-i+k+1} = a_i, \quad i = 2, 3, \dots, \min(n, m), \quad (3.24)$$

pro porosty vyšších stupňů.

3.4.2 Rozsah úlohy

Z tabulky 2 je vidět, že podmínek I. typu je v prvním decenniu $2m$, v druhém decenniu $2(m-1)$ atd. Pokud $n \geq m$, poslední taková podmínka se může vyskytnout v m -tém decenniu. Celkem jich tak může být $m(m+1)$. Pokud $n < m$, bude jejich počet v posledním n -tém decenniu roven $2(m-n+1)$ a celkový počet tedy $n(2m-n+1)$.

Je zřejmé, že celkový počet podmínek I. a II. typu je $2nm$. Z toho vyplývá, že samotných podmínek II. typu bude v případě, že $n \geq m$ právě $m(2n-m-1)$, v opačném případě potom $n(n-1)$.

Podmínky III. typu se mohou vyskytnout pouze když $n < m$, a to pro posledních $m-n$ věkových stupňů. Podmínek IV. typu tehdy bude n . Pro $n \geq m$ se budou vyskytovat pouze podmínky IV. typu a bude jich m . V obou případech tedy bude celkový počet podmínek III. a IV. typu roven m .

Tato formulace tedy obsahuje celkem $m(2n+1)$ podmínek.

Co se týče počtu kladných strukturních koeficientů soustavy vlastních omezení, v prvním decenniu obsahuje každá podmínka I. typu jeden kladný koeficient, v druhém decenniu dva koeficienty atd. Pokud $n \geq m$, poslední podmínky I. typu se vyskytnou v m -tém decenniu a budou obsahovat m kladných koeficientů. Pokud $n < m$, bude počet kladných koeficientů v posledním n -tém decenniu roven n . Celkem tedy podmínky I. typu obsahují

$$\sum_{k=1}^m k(k+1), \text{ resp. } \sum_{k=1}^m k(k+1) - \sum_{k=n+1}^m (n+k+1)(k-n) \text{ kladných koeficientů.}$$

Podmínky II. typu obsahují pro první věkový stupeň $m + 1$ kladných koeficientů, pro druhý stupeň $m + 2$ atd. První podmínka II. typu pro m -tý věkový stupeň se může vyskytnout nejdříve v $m + 1$ decenniu, pokud tedy platí $n \leq m + 1$, bude celkem $\sum_{k=2}^n (2m + k)(k - 1)$ kladných strukturních koeficientů, jinak $\sum_{k=2}^n (2m + k)(k - 1) - \sum_{k=m+2}^n (3m + k)(k - m - 1)$.

Pokud úloha zahrnuje podmínky III. typu, každá z nich obsahuje n kladných koeficientů, celkem jich tedy může být $n(m - n)$.

Konečně podmínka IV. typu pro plochu porostů i -tého věkového stupně obsahuje $m + i - 1$ kladných koeficientů, všechny takové podmínky jich tedy obsahují $km + k(k - 1)/2$, kde $k = \min(m, n)$.

3.4.3 Účelová funkce

Účelová funkce může být závislá přímo na strukturních proměnných úlohy, zde na těžebních plochách. Její formulace je potom jednoduchá:

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_i^j x_i^j . \quad (3.25)$$

Příkladem může být úhrnný objem mýtních těžeb během procesu vyrovnání; cenami c_i^j zde budou hektarové zásoby hlavního porostu v příslušných věkových stupních a krocích procesu vyrovnání.

Lze však pracovat i s účelovou funkcí, v níž vystupují ceny vztahující se k proměnným odvozeným od vlastních strukturních proměnných optimalizační úlohy. Představme si nyní, že bychom chtěli optimalizovat průběh procesu vzhledem k veličině závislé na vývoji věkové struktury, speciálně na zastoupení věkových stupňů na začátcích jednotlivých kroků procesu vyrovnání. Příkladem takové veličiny může být úhrn předmýtních těžeb. Výše předmýtní těžby v i -tém věkovém stupni a j -tém decenniu by byla dána součinem $d_i^j a_i^j$, kde d_i^j je příslušná jednotková (hektarová) velikost decennální předmýtní těžby. Účelová funkce potom bude

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m d_i^j a_i^j . \quad (3.26)$$

Za druhé se koeficienty d vyskytují při výpočtech ploch druhého, a vyšších, věkových stupňů při odečítání ploch odtěžených v předchozích decenniích. Zde tedy mají záporné znaménko. V souvislosti s těžební plochou x_i^j se poprvé vyskytnou při výpočtu plochy a_{i+1}^{j+1} (koeficient d_{i+1}^{j+1}). Podruhé potom u plochy a_{i+2}^{j+2} (koeficient d_{i+2}^{j+2}), atd. Celkem takových koeficientů bude $n - j$, nanejvýš však $m - i$ a jejich součet bude $\sum_{k=1}^{\min(m-i, n-j)} d_{k+i}^{k+j}$.

Podle definice (3.26) patří do účelové funkce ještě členy obsahující plochy porostů ve výchozí věkové struktuře, tj. $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^m d_i^j a_{i-j+1}^1$. Pro účelovou funkci tak dostáváme

$$z = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\min(m, n-j)} d_k^{k+j} - \sum_{k=1}^{\min(m-i, n-j)} d_{k+i}^{k+j} \right) x_i^j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^m d_i^j a_{i-j+1}^1. \quad (3.27)$$

Zahrnutí členů obsahujících plochy porostů výchozí věkové struktury zajistí správnou hodnotu účelové funkce. Tyto členy jsou však konstantní a jejich přítomnost tedy nijak neovlivní samotné řešení optimalizační úlohy (optimální velikosti těžebních ploch x_i^j). Pokud by tedy pro nás hodnota účelové funkce nebyla důležitá, lze použít její jednodušší vyjádření

$$z = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\min(m, n-j)} d_k^{k+j} - \sum_{k=1}^{\min(m-i, n-j)} d_{k+i}^{k+j} \right) x_i^j. \quad (3.28)$$

Další možností je zkombinovat oba uvedené přístupy a zahrnout do účelové funkce jak ceny těžebních ploch, tak i ceny ploch porostů. Tak by například bylo možné hledat řešení maximalizující úhrn celkových těžeb. Celková těžba se skládá z těžeb mýtních a těžeb předmýtních. Úhrn těžby mýtní je dán součtem

$$E_M = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_i^j x_i^j,$$

těžby předmýtní jsou

$$E_P = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m d_i^j a_i^j.$$

Máme tedy

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_i^j x_i^j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m d_i^j a_i^j,$$

čili

$$z = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\min(m, n-j)} d_k^{k+j} - \sum_{k=1}^{\min(m-i, n-j)} d_{k+i}^{k+j} + c_i^j \right) x_i^j + \sum_{i=1}^m c_i^n x_i^n + \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^m d_i^j a_{i-j+1}^1 \quad (3.29)$$

s využitím (3.27), nebo

$$z = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\min(m, n-j)} d_k^{k+j} - \sum_{k=1}^{\min(m-i, n-j)} d_{k+i}^{k+j} + c_i^j \right) x_i^j + \sum_{i=1}^m c_i^n x_i^n \quad (3.30)$$

s využitím (3.28).

3.5 Úloha s plochami porostů jako strukturními proměnnými

Jako strukturní proměnné lze použít i relativní velikosti ploch věkových stupňů a_i^j . Soustava vlastních omezení musí opět zajistit, aby se výše těžeb vždy pohybovala v povolených mezích a na konci vyrovnávacího procesu bylo dosaženo požadované normální věkové struktury.

3.5.1 Soustava vlastních omezení

Podmínky I. typu

Tyto podmínky se vztahují k plošným podílům věkových stupňů na začátku prvního a na konci posledního (tj. začátku $n+1$) vyrovnávacího kroku. Počáteční i cílové zastoupení věkových stupňů jsou vstupními veličinami pro formulaci úlohy a podmínky jsou tedy triviální:

$$\left. \begin{array}{l} a_i^1 = a_i^{\text{počáteční}} \\ a_i^{n+1} = a_i^{\text{cílová}} = a_i \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.31)$$

Podmínky II. typu

Plocha porostů druhého, a všech vyšších, věkových stupňů na začátku druhého, i všech dalších, kroků je dána rozdílem plochy, kterou měly dotyčné porosty na začátku předchozího kroku (tehdy patřily do nižší věkové třídy) a plochy z nich odtěžené:

$$a_i^j = a_{i-1}^{j-1} - x_{i-1}^{j-1}.$$

Velikosti těžebních ploch musí stále splňovat obecné podmínky

$$l_{i-1}^{j-1} a_{i-1}^{j-1} \leq x_{i-1}^{j-1} \leq u_{i-1}^{j-1} a_{i-1}^{j-1}.$$

Pokud podle (3.11) dosadíme za x_{i-1}^{j-1} , dostáváme

$$l_{i-1}^{j-1} a_{i-1}^{j-1} \leq a_{i-1}^{j-1} - a_i^j \leq u_{i-1}^{j-1} a_{i-1}^{j-1},$$

neboli

$$\left. \begin{array}{l} a_i^j - (1 - l_{i-1}^{j-1}) a_{i-1}^{j-1} \leq 0 \\ a_i^j - (1 - u_{i-1}^{j-1}) a_{i-1}^{j-1} \geq 0 \end{array} \right\} \quad j = 2, 3, \dots, n+1, \quad i = 2, 3, \dots, m. \quad (3.32)$$

Podmínky III. typu

Zbývá specifikovat podmínky pro plochy porostů prvního věkového stupně na začátcích druhého až n -tého kroků vyrovnávacího procesu. Tyto porosty vždy vznikly zalesněním ploch vytěžených během předchozího kroku, tedy:

$$a_1^j = \sum_{i=1}^m x_i^{j-1}.$$

S využitím (3.11) a toho, že poslední věkový stupeň je vždy smýcen celý, máme

$$a_1^j = \sum_{i=1}^{m-1} (a_i^{j-1} - a_{i+1}^j) + a_m^{j-1}.$$

Po úpravě tedy dostaneme

$$\sum_{i=1}^m a_i^j = 1 \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (3.33)$$

neboli plocha porostů prvního věkového stupně musí být taková, aby součet ploch všech věkových stupňů v druhém až n -tém kroku vyrovnávacího procesu byl roven jedné. Tuto

podmínku není nutné uplatňovat pro porosty na začátku prvního a konci posledního decennia, neboť je již obsažena v podmínkách I. typu.

Je zřejmé, že takto definovaná soustava vlastních omezení je ekvivalentní se soustavou definovanou podmínkami (3.18) – (3.24) – v každém věkovém stupni a decenniu vyrovnávacího procesu jsou pro možnou velikost těžeb určeny přesně stejné hranice. Pokud se tedy podaří ekvivalentním způsobem formulovat i účelovou funkci, budou stejné i výsledky řešení obou úloh.

3.5.2 Rozsah úlohy

Podmínky I. typu se vztahují k plochám všech věkových stupňů na začátku a konci procesu vyrovnání. Celkem jich tedy je $2m$. Podmínky II. typu omezují velikosti ploch porostů druhého a vyšších věkových stupňů od druhého až do $n+1$ decennia. Je jich tedy $2n(m-1)$. Konečně podmínek III. typu je $n-1$. Celkový počet všech podmínek je zde tedy $(n+1)(2m-1)$.

Jelikož každá podmínka I. typu obsahuje jeden kladný strukturní koeficient, podmínka II. typu dva a podmínka III. typu m kladných koeficientů, bude celkový počet kladných strukturních koeficientů $m + 5nm - 4n$.

3.5.3 Účelová funkce

Pokud hledáme řešení optimalizující průběh procesu vzhledem k veličinám závislým přímo na porostních plochách (například úhrn předmýtních těžeb), je účelová funkce formulována jednoduše jako

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m d_i^j a_i^j, \quad (3.34)$$

kde d_i^j jsou cenové koeficienty. Tato účelová funkce je ekvivalentní funkci (3.27).

Podobně jako v případě formulace 3.4 můžeme i zde sestavit účelovou funkci závisící na veličinách odvozených od vlastních strukturních proměnných úlohy, tentokrát na velikostech těžebních ploch. Díky tomu je i zde možné řešit například úlohu maximalizace úhrnu mýtních těžeb a to dokonce, jak vyplývá z rozboru složitosti úlohy, způsobem výrazně jednodušším. Výchozí tvar účelové funkce je

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_i^j x_i^j.$$

Velikost těžebních ploch x_i^j je tentokrát nutné vyjádřit prostřednictvím ploch věkových tříd a_i^j . Těžební plochy jsou pro všechny věkové třídy kromě poslední dány jako

$$x_i^j = a_i^j - a_{i+1}^{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, m-1,$$

poslední věková třída je vždy vytěžena celá, tedy

$$x_m^j = a_m^j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Pro účelovou funkci tedy máme

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} c_i^j (a_i^j - a_{i+1}^{j+1}) + \sum_{j=1}^n c_m^j a_m^j$$

a po úpravě

$$z = \sum_{i=1}^m c_i^1 a_i^1 + \sum_{j=2}^n c_1^j a_1^j + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^m (c_i^j - c_{i-1}^{j-1}) a_i^j - \sum_{i=2}^m c_{i-1}^n a_i^{n+1}. \quad (3.35)$$

Takto definovaná účelová funkce je ekvivalentní funkci (3.25).

Samozřejmě je i zde možné zahrnout do účelové funkce jak ceny těžebních ploch, tak i ceny ploch porostů:

$$z = \sum_{i=1}^m (c_i^1 + d_i^1) a_i^1 + \sum_{j=2}^n (c_1^j + d_1^j) a_1^j + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^m (c_i^j - c_{i-1}^{j-1} + d_i^j) a_i^j - \sum_{i=2}^m c_{i-1}^n a_i^{n+1}. \quad (3.36)$$

Tato účelová funkce je ekvivalentní s (3.29).

3.6 Úloha s plochami porostů jako strukturními proměnnými – redukovaná

Strukturními proměnnými zůstávají velikosti ploch věkových stupňů, formulaci úlohy popsanou v sekci 3.5 je však možné malou technickou úpravou dále zjednodušit.

3.6.1 Soustava vlastních omezení

Počáteční a cílové zastoupení ploch a_i^1 a a_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, m$, je pevně dáno a je proto zbytečné zacházet s nimi jako s běžnými strukturními proměnnými. Potom podmínky I. typu zcela odpadnou.

Podmínky II. typu

Podstata těchto podmínek zůstane stejná jako v případě (3.32). Je pouze třeba technicky zohlednit skutečnost, že veličiny a_i^1 a a_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, m$ již nejsou strukturními proměnnými úlohy. Ve formulaci podmínek proto místo nich použijí symboly $a_i^{\text{počáteční}}$ a $a_i^{\text{cílová}}$:

$$\left. \begin{array}{l} a_i^2 - (1 - l_{i-1}^1) a_{i-1}^{\text{počáteční}} \leq 0 \\ a_i^2 - (1 - u_{i-1}^1) a_{i-1}^{\text{počáteční}} \geq 0 \end{array} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$\left. \begin{array}{l} a_i^j - (1 - l_{i-1}^{j-1}) a_{i-1}^{j-1} \leq 0 \\ a_i^j - (1 - u_{i-1}^{j-1}) a_{i-1}^{j-1} \geq 0 \end{array} \right\} \quad j = 3, 4, \dots, n, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$\left. \begin{array}{l} a_i^{\text{cílová}} - (1 - l_{i-1}^n) a_{i-1}^n \leq 0 \\ a_i^{\text{cílová}} - (1 - u_{i-1}^n) a_{i-1}^n \geq 0 \end{array} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, m \quad (3.37)$$

Podmínky III. typu

Podmínky III. typu zůstávají beze změny stejné:

$$\sum_{i=1}^m a_i^j = 1 \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (3.38)$$

3.6.2 Rozsah úlohy

Oproti úplné formulaci úlohy zde chybí podmínky I. typu, ostatní zůstávají stejné, celkový počet podmínek tedy je $n(2m-1)-1$.

Protože plochy a_i^1 a a_i^{n+1} nyní nejsou strukturálními proměnnými úlohy, bude u podmínek II. typu v prvním a posledním decenniu pouze jeden kladný strukturální koeficient a celkový počet kladných koeficientů tedy bude $(n-1)(5m-4)$.

3.6.3 Účelová funkce

Účelové funkce v této formulaci lze získat jednoduchou úpravou funkcí (3.34), (3.35) a (3.36) – vypuštěním členů, v nichž se vyskytují proměnné a_i^1 a a_i^{n+1} . Tato úprava samozřejmě ovlivní hodnotu účelové funkce. Protože však je výchozí a cílové rozdělení věkových stupňů konstantní, vlastní optimální řešení úlohy tímto ovlivněno nebude. Pokud by při řešení určité úlohy byla důležitá skutečná hodnota účelové funkce, lze proměnné a_i^1 a a_i^{n+1} nahradit konstantními členy $a_i^{\text{počáteční}}$ a $a_i^{\text{cílová}}$. Pro jednotlivé typy účelových funkcí dále uvedu obě varianty.

Účelová funkce pro optimalizaci vzhledem k veličinám závislým přímo na porostních plochách:

$$z = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^m d_i^j a_i^j, \quad (3.39)$$

resp.

$$z = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^m d_i^j a_i^j + \sum_{i=1}^m d_i^1 a_i^{\text{počáteční}}. \quad (3.40)$$

Tyto funkce jsou ekvivalentní funkcím (3.28), resp. (3.27).

Účelová funkce pro optimalizaci vzhledem k veličinám závislým na velikosti těžebních ploch je

$$z = \sum_{j=2}^n c_1^j a_1^j + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^m (c_i^j - c_{i-1}^{j-1}) a_i^j, \quad (3.41)$$

resp.

$$z = \sum_{i=1}^m c_i^1 a_i^{\text{počáteční}} + \sum_{j=2}^n c_1^j a_1^j + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^m (c_i^j - c_{i-1}^{j-1}) a_i^j - \sum_{i=2}^m c_{i-1}^n a_i^{\text{cílová}} . \quad (3.42)$$

Funkce (3.42) je ekvivalentní funkci (3.25).

Účelová funkce pro optimalizaci vzhledem k veličinám závislým na kombinaci ploch porostů a ploch těžebních je

$$z = \sum_{j=2}^n (c_1^j + d_1^j) a_1^j + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^m (c_i^j - c_{i-1}^{j-1} + d_i^j) a_i^j , \quad (3.43)$$

resp.

$$z = \sum_{i=1}^m (c_i^1 + d_i^1) a_i^{\text{počáteční}} + \sum_{j=2}^n (c_1^j + d_1^j) a_1^j + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^m (c_i^j - c_{i-1}^{j-1} + d_i^j) a_i^j - \sum_{i=2}^m c_{i-1}^n a_i^{\text{cílová}} . \quad (3.44)$$

Tyto funkce jsou ekvivalentní funkcím (3.30), resp. (3.29).

3.7 Stochastické programování

Dosud popisovaná metoda hledání optimálního způsobu vyrovnání věkové struktury je v jednom ohledu zjevně nerealistická. V průběhu celého vyrovnávacího procesu (čili po dobu řádově stovky let) jsme předpokládali, že parametry úlohy zůstávají konstantní. Přitom jak velikosti zásob hlavního a vedlejšího porostu (vystupující v roli cenových koeficientů účelové funkce), tak zejména výše nahodilých těžeb (strukturní koeficienty soustavy vlastních omezení) mohou kolísat v širokém rozmezí. Obr. 1 ukazuje, že výše ročních nahodilých těžeb kolísala v minulých 80 letech v rozmezí 0,8 – 11,5 mil. m³. Variabilita hektarových zásob dřeva není tak výrazná, pokud bychom však přešli od materiálního vyjádření produkce k finančnímu, problém by se nepochybně dále zvýraznil.

Metoda *stochastického lineárního programování* (viz. např. Korda, 1967) je modifikací standardního lineárního programování umožňující řešit nastíněnou problematiku. Připomeňme zápis standardní úlohy lineárního programování. Chceme maximalizovat hodnotu účelové funkce $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ při vlastních omezeních $\mathbf{Q}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ a podmínkách nezápornosti řešení $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Předpokládejme nyní, že prvky matice \mathbf{Q} a vektorů \mathbf{b} , \mathbf{c} , nebo

alespoň některé z nich, jsou náhodné veličiny se známým rozdělením pravděpodobnosti. Označme jejich distribuční funkci $F(\mathbf{Q}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Označme dále množinu všech možných realizací těchto náhodných veličin jako S .

Předpokládejme, že jsme pro jistou realizaci $\{\mathbf{Q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \in S$ vyřešili standardní deterministickou úlohu lineárního programování a obdrželi optimální řešení \mathbf{x} a jemu odpovídající hodnotu účelové funkce z . Jejich hodnoty jsou přirozeně různé pro každou realizaci $\{\mathbf{Q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ a jsou tedy také náhodnými veličinami. Označme je \mathbf{x}^* a z^* . Na základě známé distribuční funkce $F(\mathbf{Q}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ je teoreticky možné odvodit distribuční funkce vektoru \mathbf{x}^* a veličiny z^* , popřípadě distribuční funkci $F(z | \mathbf{x})$ účelové funkce z pro dané \mathbf{x} . Tento postup je však značně obtížný a pro rozsáhlejší úlohy zpravidla neproveditelný.

Jinou možností je přistoupit k numerickému řešení problému. Generátorem náhodných čísel z příslušných rozdělení vygenerujeme k realizací vstupních parametrů $\{\mathbf{Q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ a pro každou z nich vyřešíme standardní úlohu lineárního programování. Každá taková simulace vyrovnávacího procesu poskytne jednu realizaci náhodných veličin \mathbf{x}^* a z^* . Zpracováním výsledných k vektorů optimálních řešení \mathbf{x} a hodnot účelové funkce z běžnými metodami popisné a matematické statistiky (Anděl, 1998) lze potom zpětně odhadnout rozdělení veličin \mathbf{x}^* a z^* .

Střední hodnotu náhodného vektoru \mathbf{x}^* bodově odhadneme aritmetickým průměrem

$$\bar{x}_i^j = \sum_{l=1}^k x_{i,l}^j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.45)$$

kde $x_{i,l}^j$ je hodnota strukturální proměnné x_i^j v l -té simulaci. Pokud můžeme předpokládat normální rozdělení složek vektoru \mathbf{x}^* , lze $(1-\alpha)100\%$ intervaly pokrývající střední hodnoty složek \mathbf{x}^* určit ze vztahu

$$\bar{x}_i^j \pm \frac{s t_{k-1}(\alpha)}{\sqrt{k}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.46)$$

kde $t_{k-1}(\alpha)$ je kritická hodnota Studentova rozdělení s $k-1$ stupni volnosti a s je směrodatná odchylka veličiny x_i^j . V případě řešení primární úlohy vyrovnání věkové struktury můžeme ještě před provedením výpočtů odhadnout největší možnou šířku tohoto intervalu. V roli proměnných zde vystupují velikosti těžebních ploch nebo plochy věkových stupňů, které mohou nabýt pouze hodnot z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Označme R rozpětí možných hodnot. Lze

dokázat, že směrodatná odchylka nemůže nabýt hodnoty větší než $R/2$, v našem případě tedy $1/2$. Horní omezení šířky intervalu pokrývajícího střední hodnotu veličiny x_i^j tak je

$$\bar{x}_i^j \pm \frac{t_{k-1}(\alpha)}{2\sqrt{k}}. \quad (3.47)$$

Bodový odhad směrodatné odchylky veličiny x_i^j je

$$s = \frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^k (x_{i,l}^j - \bar{x}_i^j)^2. \quad (3.48)$$

Za předpokladu normálního rozdělení složek \mathbf{x}^* je intervalový odhad směrodatné odchylky dán jako

$$\left(\sqrt{\frac{(k-1)s}{\chi_{k-1}^2(\alpha/2)}}, \sqrt{\frac{(k-1)s}{\chi_{k-1}^2(1-\alpha/2)}} \right), \quad (3.49)$$

kde $\chi_{k-1}^2(\alpha)$ je kritická hodnota rozdělení χ^2 s $k-1$ stupni volnosti.

Spektrum získaných výsledků je také možné prezentovat formou histogramů relativních četností. Tyto histogramy lze chápat jako odhady hustot rozdělení příslušných náhodných veličin. Spolehlivost odhadu závisí na počtu provedených simulací. Předpokládejme, že skutečná pravděpodobnost toho, že náhodná veličina Y nabude hodnoty z intervalu $\langle y_1, y_2 \rangle$ je p . Se stejnou pravděpodobností se v intervalu $\langle y_1, y_2 \rangle$ umístí i kterákoli ze simulací veličiny Y . Pokud provedeme nezávisle na sobě k simulací, bude počet L takových případů náhodnou veličinou s binomickým rozdělením s parametry k a p . Pro velké k můžeme podle Moivre-Laplaceovy věty provést aproximaci normálním rozdělením se střední hodnotou kp a rozptylem $kp(1-p)$. Relativní četnost $L_r = L/k$ potom bude mít také rozdělení normální se střední hodnotou p a rozptylem $p(1-p)/k$. Relativní četnost L_r lze použít jako bodový odhad parametru p . Pro $(1-\alpha)100\%$ intervalový odhad parametru p potom máme

$$L_r \pm u\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{L_r(1-L_r)}{k}}, \quad (3.50)$$

kde $u(\alpha/2)$ je kritická hodnota normovaného normálního rozdělení na hladině $\alpha/2$. Naopak, pokud chceme zajistit, aby se odchylka od správné hodnoty parametru větší než Δ vyskytla s pravděpodobností menší než α , minimální potřebný počet simulací bude

$$k > \frac{u^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)p(1-p)}{\Delta^2}. \quad (3.51)$$

Šířka intervalového odhadu p a minimálně potřebný počet simulací závisí na hodnotě p , resp. L_r . Bez ohledu na to však můžeme určit horní mez těchto veličin pro nejhorší možný případ. Součin $p(1-p)$ nabude největší hodnoty pro $p = 0,5$. Pro obvykle používanou hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ tak pro horní mez šířky intervalu pokrývajícího p dostaneme přibližný vztah

$$L_r \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (3.52)$$

a pro minimální počet simulací

$$k > \frac{1}{\Delta^2}. \quad (3.53)$$

4. Příklad

4.1 Vstupní parametry

Výchozí stav

Předpokládejme, že máme soubor smrkových porostů o absolutní výškové bonitě 28. Soubor zahrnuje porosty prvního až sedmnáctého věkového stupně. Zastoupení věkových stupňů je značně nevyrovnané se zřejmým nadbytkem porostů středního věku a starších (tab. 3). Data byla převzata z Inventarizace lesů České republiky pro rok 2000. Naším cílem bude vyrovnat věkovou strukturu do stavu normálního v co možná nejkratším čase.

Tab. 3 Výchozí věková struktura.

Věkový stupeň	Zastoupení věkových stupňů
1	0,088
2	0,080
3	0,074
4	0,083
5	0,066
6	0,083
7	0,104
8	0,087
9	0,088
10	0,085
11	0,064
12	0,041
13	0,025
14	0,014
15	0,008
16	0,004
17	0,006

Nahodilé těžby

Metoda určení pravděpodobností zničení porostů a jejich odhady jsou převzaty od Kouby (1989). Odhady jsou získány s využitím teorie spolehlivosti. Jedním ze základních pojmů zde je funkce spolehlivosti $R(t)$, definována jako pravděpodobnost, že určitý objekt

(v našem případě porost) nebude zničen před uplynutím intervalu o délce t . Ve zmíněné práci je pro modelování funkce spolehlivosti použito doplnku k Weibullovu rozdělení, tj.

$$R(t) = \exp(-\lambda t^\alpha). \quad (4.1)$$

Parametry α a λ se pro odhadnutou pravděpodobnost R_1 přežití věku t_1 a pravděpodobnost R_2 přežití věku t_2 určí ze vztahů

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{\ln R_1}{\ln R_2}\right)}{\ln\left(\frac{t_1}{t_2}\right)} \quad (4.2)$$

a

$$\lambda = \frac{\ln R_2}{t_2^\alpha}. \quad (4.3)$$

Pokud na lesní porost během jeho existence působí více škodlivých faktorů, úhrnná funkce spolehlivosti je dána součinem

$$R(t) = \prod_{i=1}^k (c_i R_i(t) + (1 - c_i)), \quad (4.4)$$

kde k je počet škodlivých faktorů, $R_i(t)$ je dílčí funkce spolehlivosti (4.1) pro i -tý faktor a c_i je pravděpodobnost s níž by byl v neomezeném čase porost zničen samotným i -tým faktorem.

Kouba (1989) uvažoval 4 škodlivé faktory: poškození kultur, škody sněhem, větrem a blíže nespecifikované škody o konstantní intenzitě. Odhady pravděpodobnosti zničení (resp. nepoškození) porostů jednotlivými škodlivými faktory jsou uvedeny v tab. 4

Tab. 4 Parametry funkcí spolehlivosti pro jednotlivé škodlivé faktory

Škodlivý činitel	t_1	R_1	t_2	R_2	c
Škody v kulturách	1	0,333	2	0,100	0,45
Sníh	19	0,990	90	0,001	0,20
Vítr	100	0,900	200	0,200	1,00
Nespecifikované škody	10	0,995	100	0,950	1,00

Pravděpodobnosti zničení porostů podle věkových stupňů se potom vypočítají jako

$$p_i = \frac{\int_{ir}^{(i+1)r} R(t) dt}{\int_{(i-1)r}^{ir} R(t) dt}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.5)$$

Tab. 5 Pravděpodobnosti zničení porostu ve věkových stupních.

Věkový stupeň	Pravděpodobnost zničení porostu p_i
1	0.074
2	0.011
3	0.025
4	0.046
5	0.066
6	0.068
7	0.051
8	0.036
9	0.036
10	0.046
11	0.058
12	0.073
13	0.090
14	0.110
15	0.132
16	0.156
17	0,182

Tyto pravděpodobnosti lze ztotožnit s relativní četností zničených porostů a tedy interpretovat jako plošné podíly porostů zničených v daném věkovém stupni.

Cílový stav

Cílovým stavem bude takové rozdělení věkových stupňů, které lze při daném riziku nahodilých těžeb považovat za dlouhodobě nejstabilnější. Pro známé pravděpodobnosti zničení porostů lze toto rozdělení vypočítat podle vzorce (2.15), nebo ekvivalentně (Kouba, 1989) podle

$$a_i = \frac{\int_0^{ir} R(t) dt}{\int_0^{mr} R(t) dt}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.6)$$

kde $R(t)$ je funkce spolehlivosti (4.4).

Počet věkových stupňů v cílové věkové struktuře bude stanoven tak, aby maximalizoval celkový (objemový) průměrný přírůst. Tab. 6 obsahuje hodnoty celkového průměrného přírůstu (CPP) pro vybrané věkové stupně, vypočítané podle (2.26).

Tab. 6 Celkový průměrný přírůst podle věkových stupňů.

Počet věk. stupňů	8	9	10	11	12	13	14
$CPP [m^3 \cdot ha^{-1} \cdot rok^{-1}]$	8.79	8.95	9.03	9.04	9.01	8.95	8.88

Nejvyšší hodnoty nabývá celkový průměrný přírůst pro jedenáctý věkový stupeň. Počet stupňů v cílové věkové struktuře byl proto omezen na tento počet.

Tab. 7 Cílová věková struktura.

Věkový stupeň	Zastoupení věkových stupňů
1	0.114
2	0.106
3	0.104
4	0.102
5	0.097
6	0.091
7	0.084
8	0.080
9	0.077
10	0.074
11	0.071
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0

Soustava vlastních omezení úlohy lineárního programování

Omezení jsou tvořena za prvé okrajovými podmínkami, určujícími počáteční a cílovou věkovou strukturu, za druhé potom podmínkami pro minimální a maximální velikosti těžebních ploch ve věkových stupních (3.17). Dolní mez pro těžební plochy je dána očekávanými plošnými podíly porostů zničených při kalamitách (tab. 5). Horní mez je dána zákonnými předpisy. Zde budeme pro jednoduchost předpokládat, že úmyslné mýtní těžby nejsou přípustné do dosažení věku 80 let a poté je možné vytěžit celou, v daný okamžik přítomnou plochu. Porosty posledního věkového stupně jsou vytěženy vždy celé.

U tohoto příkladu jsem zahrnul ještě dodatečný požadavek na splnění těžebního ukazatele *normální paseka* v každém decenniu vyrovnávacího procesu. Normální paseka je podle vyhlášky 84/1996 Sb. definována vztahem

$$B = \frac{P}{u} Z_m k, \quad (4.7)$$

kde P je celková výměra porostní půdy, u je délka obmýti hospodářského celku, Z_m je průměrná zásoba mýtních porostů a k je délka intervalu pro nějž je normální paseka počítána. Podle zmíněné vyhlášky se navrhovaná výše mýtní těžby nesmí (pokud to není v rozporu s ukazatelem těžební procento) odchýlit o více než 20 procent od ukazatele normální paseka.

Pro úlohy lineárního programování používající jako strukturní proměnné velikosti těžebních ploch (x_i^j) lze tuto podmínku zapsat následovně

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m c_i^j x_i^j \geq 0,8 B \\ \sum_{i=1}^m c_i^j x_i^j \leq 1,2 B \end{array} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

Pro formulaci podmínky u úloh s plochami věkových stupňů (a_i^j) jako strukturními proměnnými si připomeňme, že plocha mýtní těžby je pro všechny věkové stupně kromě posledního dána rozdílem $x_i^j = a_i^j - a_{i+1}^{j+1}$ a poslední stupeň je vždy smýcen celý, tedy

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m-1} c_i^j (a_i^j - a_{i+1}^{j+1}) + c_m^j a_m^j \geq 0,8 B \\ \sum_{i=1}^{m-1} c_i^j (a_i^j - a_{i+1}^{j+1}) + c_m^j a_m^j \leq 1,2 B \end{array} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.9)$$

pro úplnou formulaci úlohy (sekce 3.5), resp.

$$\left. \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{m-1} c_i^1 (a_i^{\text{počáteční}} - a_{i+1}^2) + c_m^1 a_m^{\text{počáteční}} \geq 0,8 B \\
 \sum_{i=1}^{m-1} c_i^1 (a_i^{\text{počáteční}} - a_{i+1}^2) + c_m^1 a_m^{\text{počáteční}} \leq 1,2 B \\
 \sum_{i=1}^{m-1} c_i^j (a_i^j - a_{i+1}^{j+1}) + c_m^j a_m^j \geq 0,8 B \\
 \sum_{i=1}^{m-1} c_i^j (a_i^j - a_{i+1}^{j+1}) + c_m^j a_m^j \leq 1,2 B \\
 \sum_{i=1}^{m-1} c_i^n (a_i^n - a_{i+1}^{\text{cílová}}) + c_m^n a_m^n \geq 0,8 B \\
 \sum_{i=1}^{m-1} c_i^n (a_i^n - a_{i+1}^{\text{cílová}}) + c_m^n a_m^n \leq 1,2 B
 \end{array} \right\} \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.10)$$

pro úlohu redukovanou (sekce 3.6).

Parametry účelové funkce

Maximalizovanou veličinou bude úhrn celkových těžeb v průběhu procesu vyrovnání věkové struktury.

Celková těžba je dána součtem těžeb mýtních a předmýtních. Pro známé velikosti těžebních ploch x_i^j je mýtní těžba v j -tém decenniu dána součinem $E_M^j = \sum_{i=1}^m c_i^j x_i^j$, kde c_i^j jsou střední hektarové zásoby porostu hlavního při těžbách v i -tém věkovém stupni. Těžbu předmýtní lze určit jako $E_P^j = \sum_{i=1}^m d_i^j a_i^j$, kde a_i^j jsou plochy porostů v i -tém věkovém stupni a d_i^j jsou velikosti decennální těžby předmýtní. Budeme předpokládat, že zásoby hlavního i vedlejšího porostu budou stejné po celou dobu procesu vyrovnání, tj. $c_i^j = c_i$, $d_i^j = d_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Uvažované velikosti koeficientů c_i a d_i ve věkových stupních jsou uvedeny v tab. 8. Při jejich stanovení jsem předpokládal, že porosty jsou v rámci jednotlivých věkových stupňů rozděleny rovnoměrně. Pro dostatečně krátké rozpětí stupně (resp. decennia) r lze rovněž předpokládat, že rovnoměrné rozdělení má i čas, v němž je porost během decennia smýcen. Úhrnem mají tedy porosty patřící na začátku decennia do i -tého věkového stupně v tento okamžik střední věk $(i-1/2)r$ a jejich střední věk při těžbách v průběhu decennia je ir .

Velikosti zásob (hroubí bez kůry) hlavního porostu a decennální výše předmýtních těžeb byly převzaty z růstových tabulek (Halaj, J., Petráš, R., 1998). Uvedené tabulky obsahují údaje pro porosty do stáří 160 let. Pro určení mýtních těžeb v 17. věkovém stupni je však třeba znát velikost zásoby hlavního porostu i pro věk 170 let, pro těžby předmýtní potom jejich velikost pro následující decennium u porostů ve věku 165 let. Jejich dopočet byl proveden extrapolací. Tabulkové hodnoty byly metodou nejmenších čtverců vyrovnány Korfovou růstovou funkcí (Korf, 1939):

$$V(t) = A \exp\left(\frac{k}{1-n} t^{1-n}\right).$$

Parametry funkce pro zásoby hlavního porostu jsou $A = 1400,7$, $k = 99,5919$ a $n = 2,04317$. Ve věku $t = 170$ let tak dostáváme zásobu $893 \text{ m}^3 \cdot \text{ha}^{-1}$. Parametry pro sumu decennálních předmýtních těžeb jsou $A = 1915,1$, $k = 52,8865$ a $n = 1,78225$. Pro jejich velikost v průběhu 17. věkového stupně tedy vychází $33 \text{ m}^3 \cdot \text{ha}^{-1} \cdot \text{decennium}^{-1}$.

Tab. 8 Velikosti těžeb ve věkových stupních.

Věkový stupeň	c_i^j (zásoba hl. porostu) [$\text{m}^3 \cdot \text{ha}^{-1}$]	d_i^j (předmýtní těžba) [$\text{m}^3 \cdot \text{ha}^{-1} \cdot \text{decennium}^{-1}$]
1	0	0
2	4	1
3	85	13
4	188	29
5	285	38
6	373	43
7	450	45
8	520	46
9	582	44
10	637	44
11	687	42
12	731	41
13	771	40
14	808	38
15	842	37
16	872	36
17	893	33

Parametry pro metodu stochastického programování

V rámci metody stochastického programování je obecně možné považovat za náhodné veličiny jak koeficienty soustavy vlastních omezení, tak i cenové koeficienty účelové funkce. V tomto příkladu budeme považovat za náhodné veličiny pouze podíly nahodilých těžeb v jednotlivých věkových stupních a decenních vyrovnávacího procesu, velikosti zásob porostů budou konstantní. Bohužel, empirická data, potřebná pro serióznější modelování vývoje nahodilých těžeb, nejsou v současné době dostupná v potřebném množství ani struktuře. Zde budu pro jednoduchost předpokládat, že zmíněné veličiny jsou na sobě nezávislé a mají normální rozdělení pravděpodobnosti. Konkrétně, podíl nahodilých těžeb v porostech i -tého věkového stupně bude mít střední hodnotu p_i , rovnou pravděpodobnosti zničení porostu příslušného stupně (tab. 5) a rozptyl $k p_i(1 - p_i)$, kde k je konstanta úměrnosti. Podíly nahodilých těžeb jsou v našem případě totožné s minimálními podíly těžeb, tedy

$$l_i^j \sim N(p_i, k p_i(1 - p_i)), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Konstantu úměrnosti k jsem položil rovnu 0,01. Hodnota veličiny s takovýmto rozptylem a střední hodnotou např. 0,05 se bude s pravděpodobností 0,95 pohybovat v intervalu (0,007; 0,093).

Určitou komplikací je, že pokud budeme považovat pravděpodobnosti zničení porostů za náhodné veličiny, stanou se také plochy věkových stupňů ve stabilním stavu náhodnými veličinami. Přitom není zřejmé, zda plochy a_i , vypočítané podle (2.15), budou středními hodnotami těchto veličin a bude je tedy možné použít jako cílové rozdělení věkových stupňů. Analytický výpočet není vzhledem ke zřejmé závislosti přítomných veličin možný. Numerické ověření pomocí velkého počtu simulací však ukázalo, že přinejmenším pro parametry modelu uvedené v předchozích odstavcích jsou plochy (2.15) dobrým odhadem středních hodnot.

4.2 Realizace výpočtu

Úloha lineárního programování pro vyrovnání věkové struktury bývá značně rozsáhlá. Typicky obsahuje řádově stovky omezení a stovky strukturálních proměnných. Je velmi obtížné sestavit takovou úlohu ručně. Opakované sestavování (obvykle opět v řádu stovek či tisíců) v rámci metody stochastického programování by pak bylo zcela nemožné. Z toho důvodu jsem vyvinul počítačový program umožňující automatické sestavení takových úloh. Program je vytvořen v prostředí software *Mathematica* firmy Wolfram Research. Vstupními parametry jsou vektor počátečního zastoupení věkových stupňů, vektory minimálních a maximálních přípustných podílů těžeb ve věkových stupních a vektor cenových koeficientů účelové funkce. Výstupem je zformulovaná úloha lineárního programování a výsledek jejího řešení. Vlastní řešení úlohy je provedeno pomocí standardních funkcí software *Mathematica*.

Ve své původní podobě (Kouba, Zahradník (2004a, 2004b), Dvořáková, Zahradník (2005)) program umožňoval formulovat úlohy, v nichž v roli strukturálních proměnných vystupovaly velikosti těžebních ploch (sekce 3.4) a na těžebních plochách bezprostředně závisela i účelová funkce (3.25). Později jsem program doplnil o možnost formulace úloh s plochami věkových stupňů jako strukturálními proměnnými a všemi variantami účelových funkcí popsanych v sekcích 3.4, 3.5 a 3.6. Dále byl program rozšířen o soustavu pomocných modulů pro metodu stochastického programování, tj. pro opakované generování vstupních parametrů a statistické zpracování získaných dat.

Složitost jednotlivých formulací úlohy se výrazně liší. Jejich rozsah pro náš příklad (bez doplňkových podmínek pro těžební ukazatel normální paseka) ukazuje tabulka 9.

Tab. 9 Rozsah úlohy

Formulace úlohy – strukturální proměnné	Počet vlastních omezení	Počet strukturálních proměnných	Počet kladných strukturálních koeficientů
Těžební plochy	391	187	3982
Plochy porostů	396	204	908
Plochy porostů – redukována	362	170	874

Rozsah úloh se odráží i v čase skutečně potřebném pro jejich vyřešení. Průměrné doby řešení na (v současnosti) výkonném osobním počítači pro zmíněné tři formulace úloh jsou po řadě

39, 44 a 23 s. Nejmenší rozsah, i dobu řešení, má úloha využívající jako proměnné plochy porostů – redukováná (sekce 3.6). Z toho důvodu jsou všechny následující výpočty provedeny jejím prostřednictvím. Jako účelová funkce je použita funkce (3.44).

4.3 Výsledky

Primární úloha lineárního programování

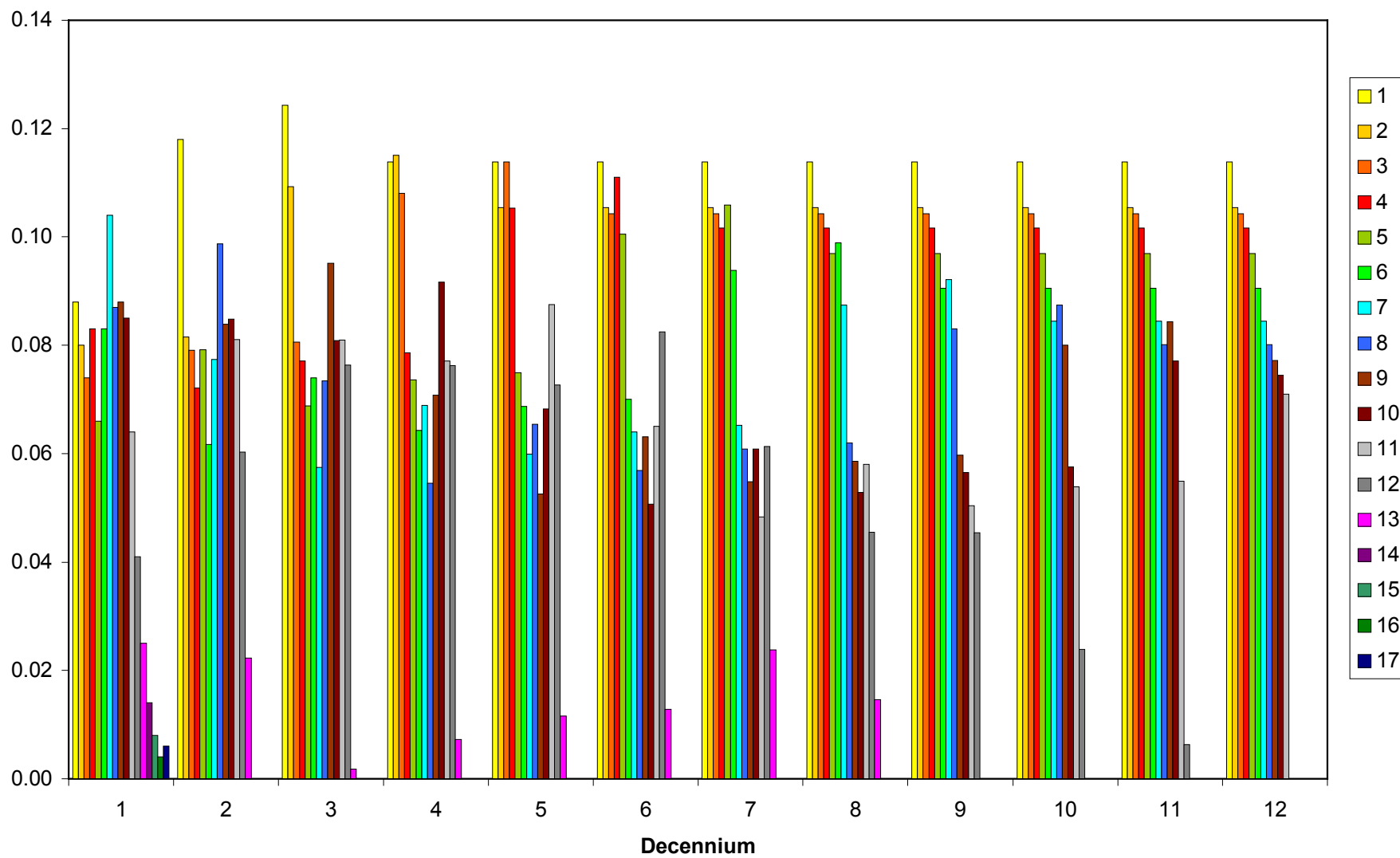
Cílem bylo vyrovnání věkové struktury v nejkratším možném čase. Postupným zmenšováním počtu kroků vyrovnávacího procesu se ukázalo, že při našem zadání je jedenáct kroků nejmenší počet, při kterém je úloha ještě řešitelná. V první fázi byla řešena standardní úloha lineárního programování pro konstantní pravděpodobnosti zničení porostů.

Sloupcový graf na obrázku 2 zachycuje vypočítané optimální zastoupení věkových stupňů (ploch porostů) a_i^j (rozlišených barvami, viz. legenda obrázku) na začátcích jednotlivých decenií vyrovnávacího procesu. První blok sloupečků tedy znázorňuje výchozí a poslední blok cílovou věkovou strukturu.

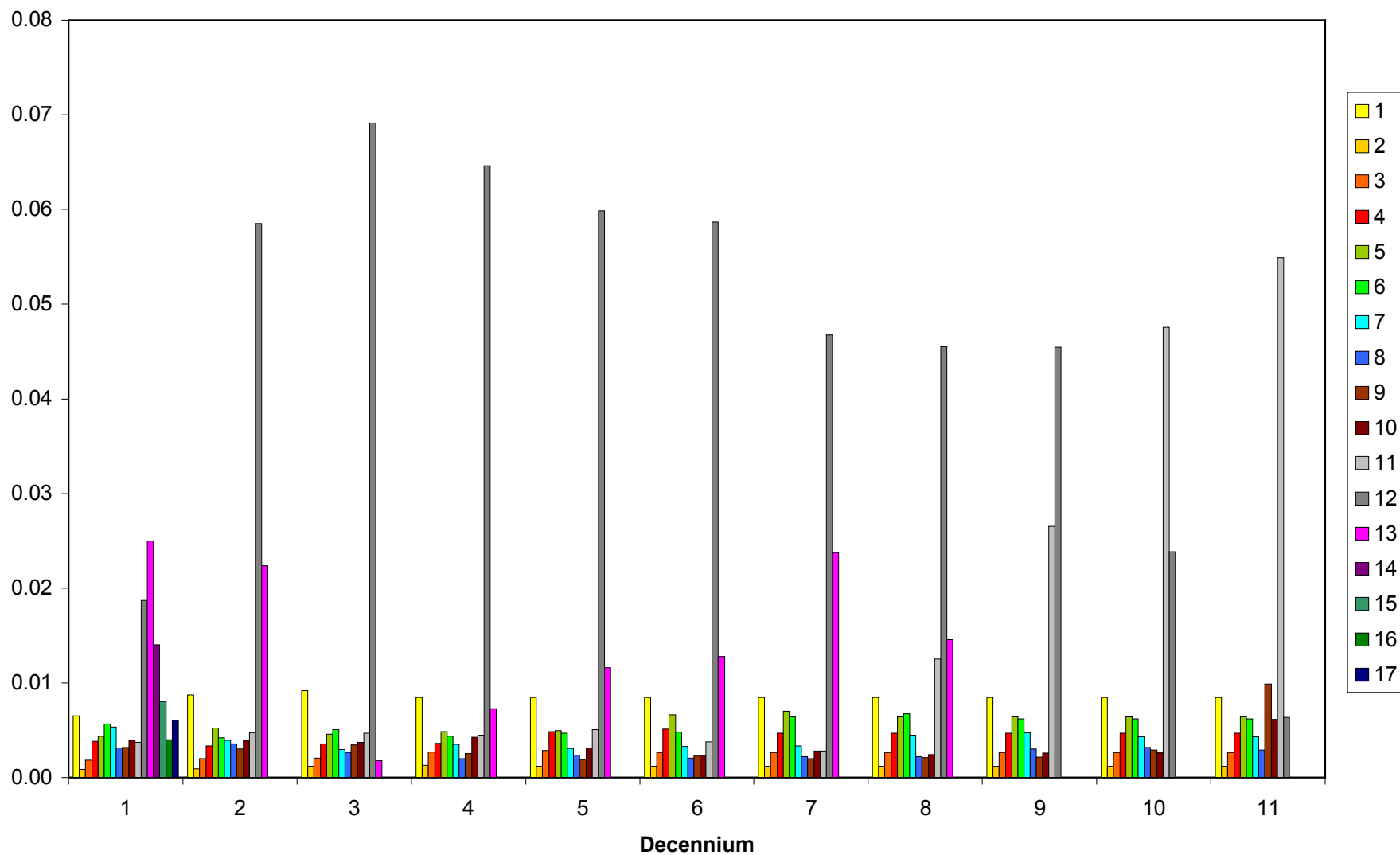
Obrázek 3 prezentuje výsledky výpočtu optimálních velikostí těžebních ploch x_i^j ve věkových stupních pro všech 11 kroků vyrovnávacího procesu. Tyto těžební plochy jsou součtem plochy porostů zničených těžbami nahodilými s plochou porostů odtěžených úmyslnou mýtní těžbou. Lesního hospodáře by zřejmě zajímala zejména druhá z uvedených složek – tu jedinou má totiž pod kontrolou. Optimální velikosti této úmyslné složky těžebních ploch, vypočítané jako

$$y_i^j = x_i^j - l_i^j a_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

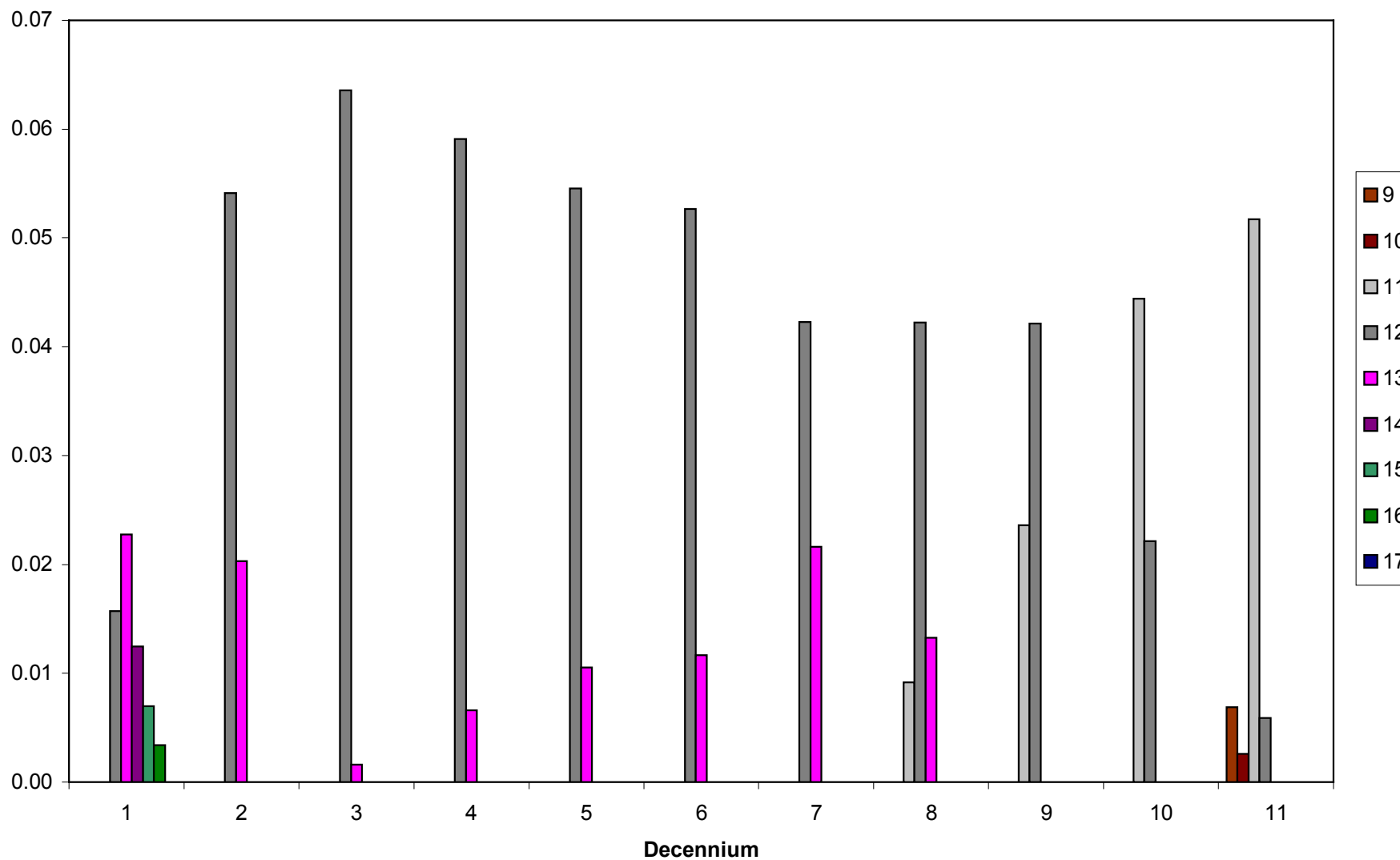
jsou prezentovány na obrázku 4.



Obr. 2 Vývoj zastoupení věkových stupňů.



Obr. 3 Vývoj velikosti těžebních ploch.



Obr. 4 Vývoj velikosti úmyslné složky těžebních ploch.

Duální úloha lineárního programování

Dále byl řešena úloha duálně sdružená s původní optimalizační úlohou. Připomeňme si, že hodnoty duálních proměnných charakterizují míru vlivu jednotlivých omezení primární úlohy na hodnotu účelové funkce. Pro větší přehlednost rozdělím duální proměnné do tří skupin.

Do první skupiny budou patřit proměnné vztahující se k prvním složkám podmínek (3.37), tedy $a_i^j - (1 - l_{i-1}^{j-1}) a_{i-1}^{j-1} \leq 0$. Tyto podmínky určují horní meze pro velikosti ploch porostů druhého až m -tého věkového stupně vzhledem k plochám porostů prvního až $m-1$ věkového stupně v předchozím decenniu. Jinými slovy, jsou to spodní meze pro velikosti těžebních ploch v porostech prvního až $m-1$ věkového stupně. Meze jsou dány pravděpodobnostmi zničení porostů škodlivými činiteli. Kladná hodnota duální proměnné by zde znamenala, že pokud by bylo možné v příslušném věkovém stupni a decenniu snížit dolní mez pro těžbu (tedy umožnit menší těžbu) o jednotku, přineslo by to zvýšení hodnoty účelové funkce právě o velikost duální proměnné. Opět však připomeňme, že při větších změnách soustavy omezení může dojít ke změně základního řešení úlohy a dříve vypočítané duální ceny pozbývají platnosti. Podmínky (3.38) byly rozděleny vždy do dvou nerovností: $\sum_{i=1}^m a_i^j \geq 1$ a $\sum_{i=1}^m a_i^j \leq 1$. Zde si všimněme první z nich. Tato nerovnost říká, že součet relativních ploch porostů prvních m věkových stupňů nesmí být nikdy menší než 1. To by mohlo být porušeno jedině tak, že (pokud budeme předpokládat platnost všech podmínek (3.37)) porosty posledního věkového stupně nebudou vytěženy všechny. V tom případě by jejich zbývající část přešla do vyššího věkového stupně než původní zadání úlohy dovolovalo. Kladná hodnota příslušné duální proměnné by tak indikovala, že v daném decenniu by bylo výhodné připustit nižší těžbu v m -tém věkovém stupni a tedy existenci starších porostů. Výsledky jsou znázorněny v obr. 5.

Vidíme, že stínové ceny nabývají u těžeb v mladých porostech vysokých hodnot. Zvláště zřejmé je to u porostů druhého a třetího věkového stupně, a to v průběhu celého vyrovnávacího procesu. To je snadno vysvětlitelné: jedná se o porosty, které ještě nedosáhly věku kulminace průměrného, a dokonce ani běžného, přírůstu. Jejich předčasné mýcení tedy vede ke ztrátám na produkci a zřejmě by bylo účelné přijmout opatření ke zvýšení jejich odolnosti vůči poškozujícím činitelům, v daném věku zejména vůči škodám sněhem. Zde by ovšem bylo třeba provést ekonomickou analýzu výhodnosti – potenciální zvýšení produkce vyjádřené finančně porovnat s náklady takových opatření.

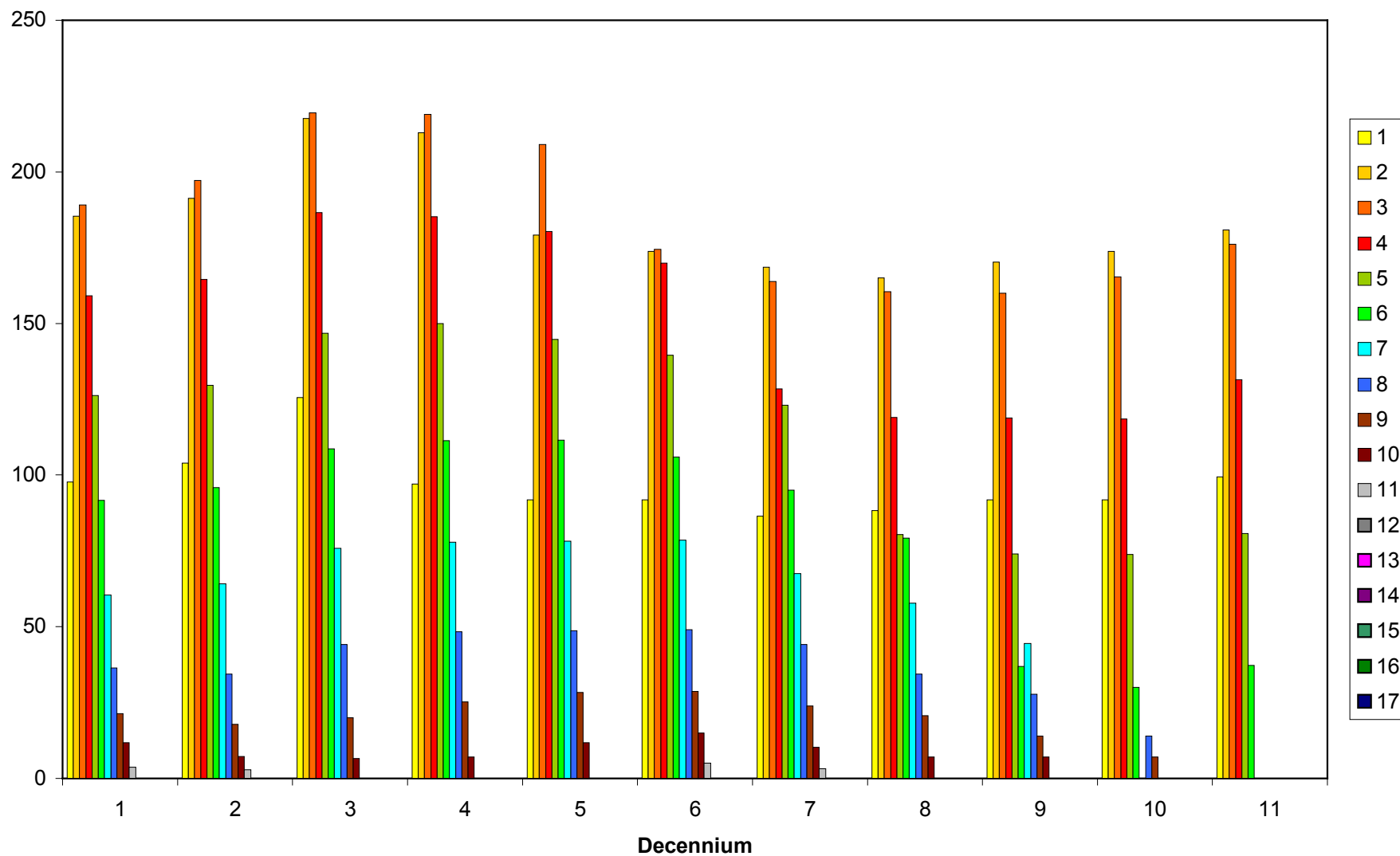
Druhá část duálních proměnných, znázorněných na obrázku 6, se vztahuje ke zbývajícím složkám podmínek 2. a 3. typu, tj. $a_i^j - (1 - u_{i-1}^{j-1}) a_{i-1}^{j-1} \geq 0$, resp. $\sum_{i=1}^m a_i^j \leq 1$. Tyto podmínky omezují velikosti těžebních ploch shora a příslušná duální proměnná tedy ukazuje o kolik by se zvýšila hodnota účelové funkce při zvýšení mezí podmínek o jednu jednotku.

Vidíme, že horní omezení výše těžeb je ve srovnání s omezením dolním mnohem méně významné. Určitou výjimku tvoří omezení těžeb v posledním věkovém stupni. Zde je však obecně dovoleno odtěžit celou dostupnou plochu a další uvolnění omezení tedy není možné.

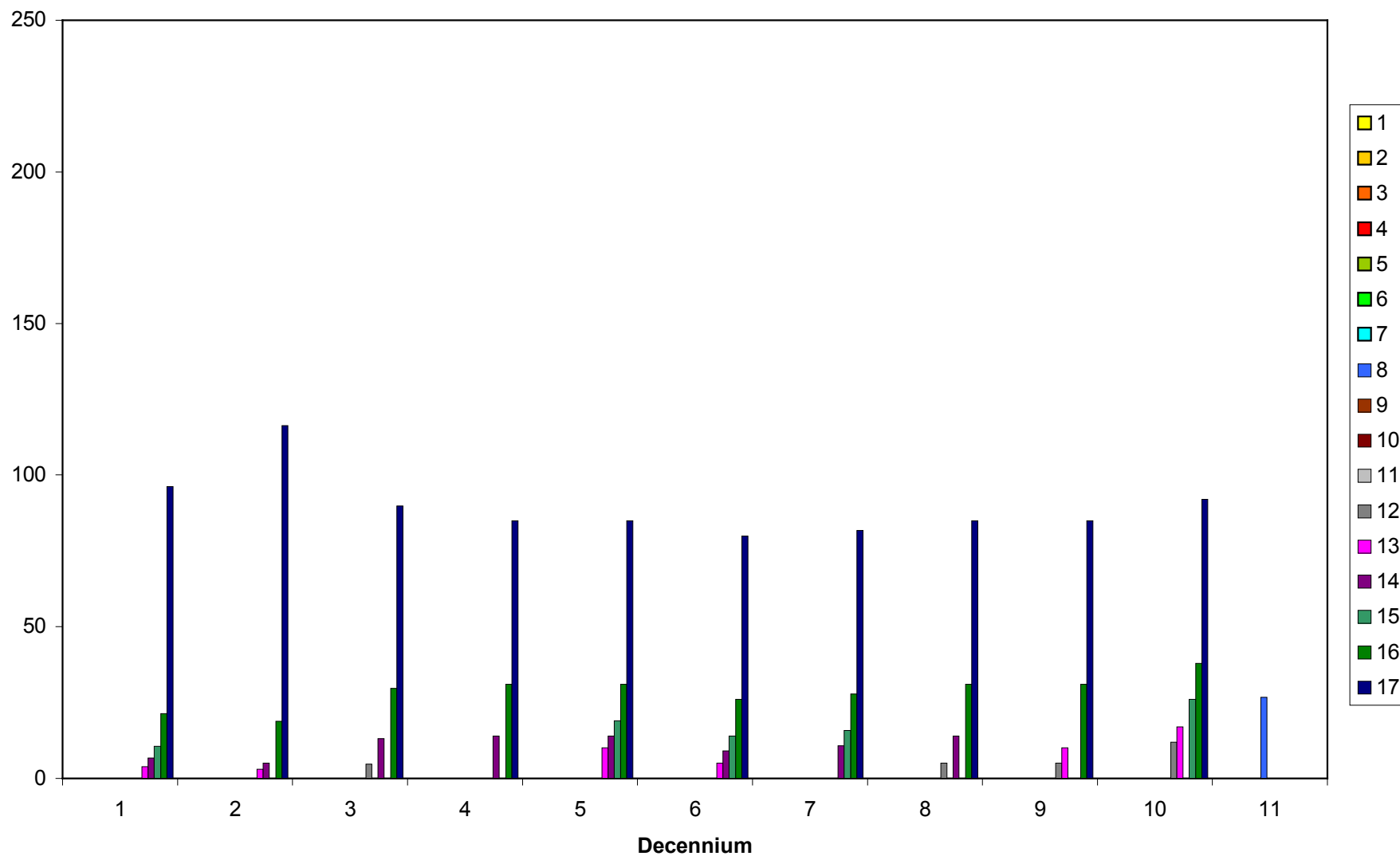
Konečně třetí skupina zahrnuje duální proměnné pro podmínky zajišťující splnění ukazatele normální paseka. Výsledky jsou uvedeny v tabulce č. 10. Hodnoty duálních proměnných jsou velmi nízké, zhruba o tři řády menší než u podmínek pro dolní meze těžeb. V našem případě tedy požadavek na splnění ukazatele normální paseka hodnotu účelové funkce významně neovlivňuje.

Tab. 10 Stínové ceny pro podmínky typu „normální paseka“

	Decennium											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Horní mez ukazatele	0,08	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Dolní mez ukazatele	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00



Obr. 5 Vývoj hodnot duálních proměnných pro dolní meze podmínek.



Obr. 6 Vývoj hodnot duálních proměnných pro horní meze podmínek.

Primární úloha stochastického programování

Celkem bylo provedeno 2000 simulací pro zadání 4.1 s proměnlivými velikostmi nahodilých těžeb.

Sloupcový graf 7 je analogií obrázku 2 – zachycuje zastoupení věkových stupňů a_i^j na začátcích jednotlivých kroků (decenií) vyrovnávacího procesu. Výšky sloupečků jsou tentokrát dány aritmetickým průměrem hodnot příslušných veličin ze všech provedených simulací. Skutečnou střední hodnotu veličin, za předpokladu normality jejich rozdělení, potom podle (3.47) pokrývá s pravděpodobností 0,95 interval o šířce nanejvýš $\bar{a}_i^j \pm 0,022$. Svislá čára protínající horní hranu sloupců v druhém až jedenáctém decenniu má význam intervalu, v němž se nacházelo 95 % výsledků z provedených simulací. Získané výsledky se příliš neliší od výsledků dosažených pro konstantní pravděpodobnosti zničení porostů (obr. 2). Nápadněji se projevuje pouze mírné zmenšení plochy porostů dvanáctého věkového stupně a naopak ponechání malého množství starých porostů zhruba do poloviny vyrovnávací doby.

Dalším výstupem je detailnější pohled na vývoj věkové struktury – odhady rozdělení pravděpodobností pro zastoupení věkových stupňů. Vzhledem k jejich značnému rozsahu jsou uvedeny pouze výsledky pro stav na začátku druhého decennia, tj. po proběhnutí prvního kroku vyrovnávacího procesu. Obrázky 8 a – 8 p znázorňují histogramy relativních četností pro zastoupení všech 17 věkových stupňů. Šířka intervalu pokrývajícího skutečnou hodnotu pravděpodobnosti je zde podle (3.52) v nejhorším případě $L_r \pm 0,022$ (s pravděpodobností 0,95).

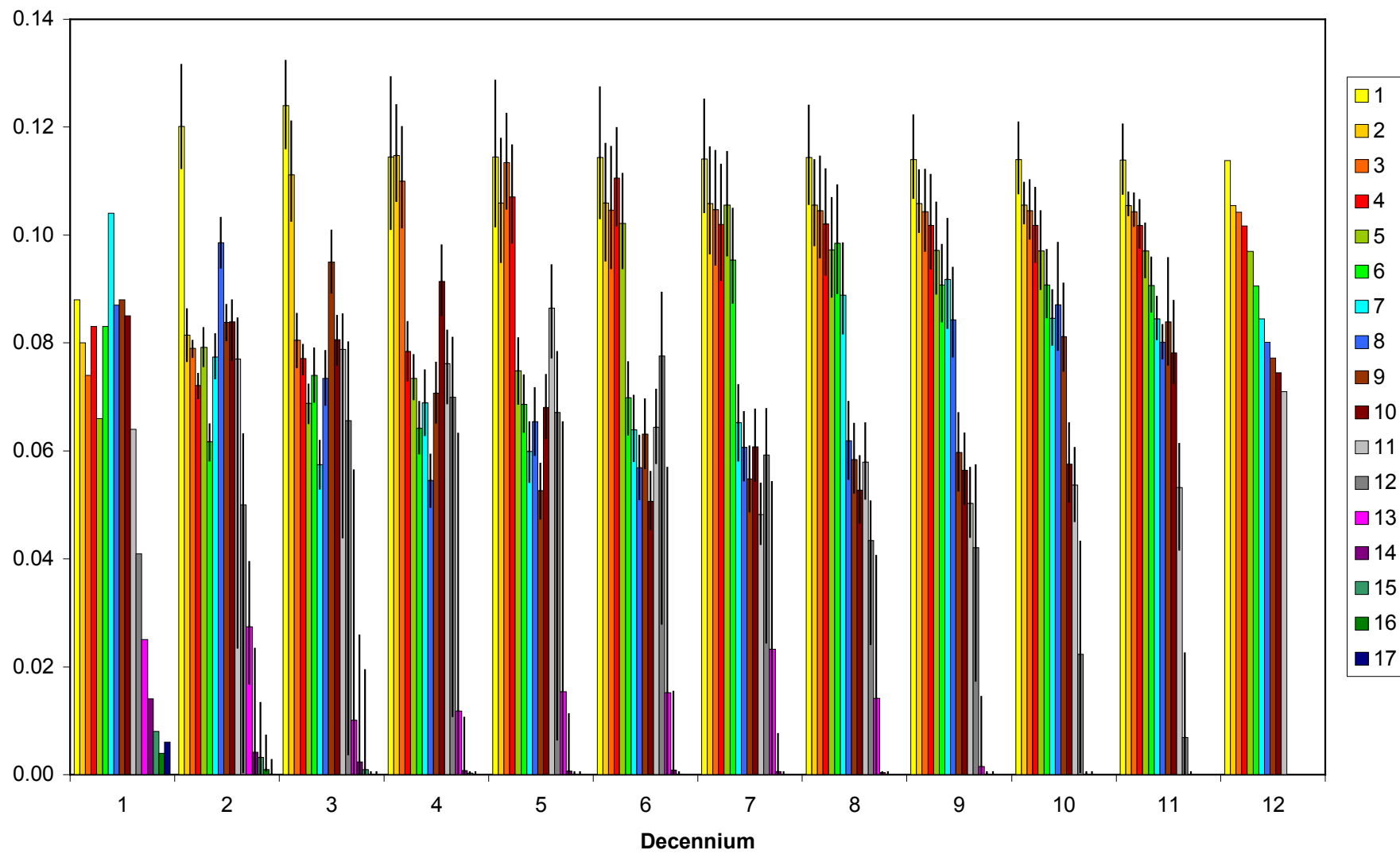
Dále je prezentován výpočet optimálních velikostí těžebních ploch x_i^j ve věkových stupních pro všech 11 kroků vyrovnávacího procesu. Obrázek 9 ukazuje celkový přehled. Rozdíly proti úloze s konstantními nahodilými těžbami (obr. 3) opět nejsou velké. V první polovině vyrovnávací doby se projevuje mírné zmenšení těžebních ploch v 12. věkovém stupni, což je vynahrazeno malým zvětšením zejména v 11. a 13. stupni. Obrázky 10 a – 10 p poté znázorňují histogramy relativních četností pro těžební plochy ve věkových stupních během prvního vyrovnávacího kroku.

Těžební plochy lze opět rozdělit na složky úmyslných a nahodilých těžeb. Celkový přehled vývoje úmyslné složky těžebních ploch je znázorněn na obr. 11. Histogramy relativních četností pro první vyrovnávací krok jsou uvedeny na obrázcích 12 a – 12 ch.

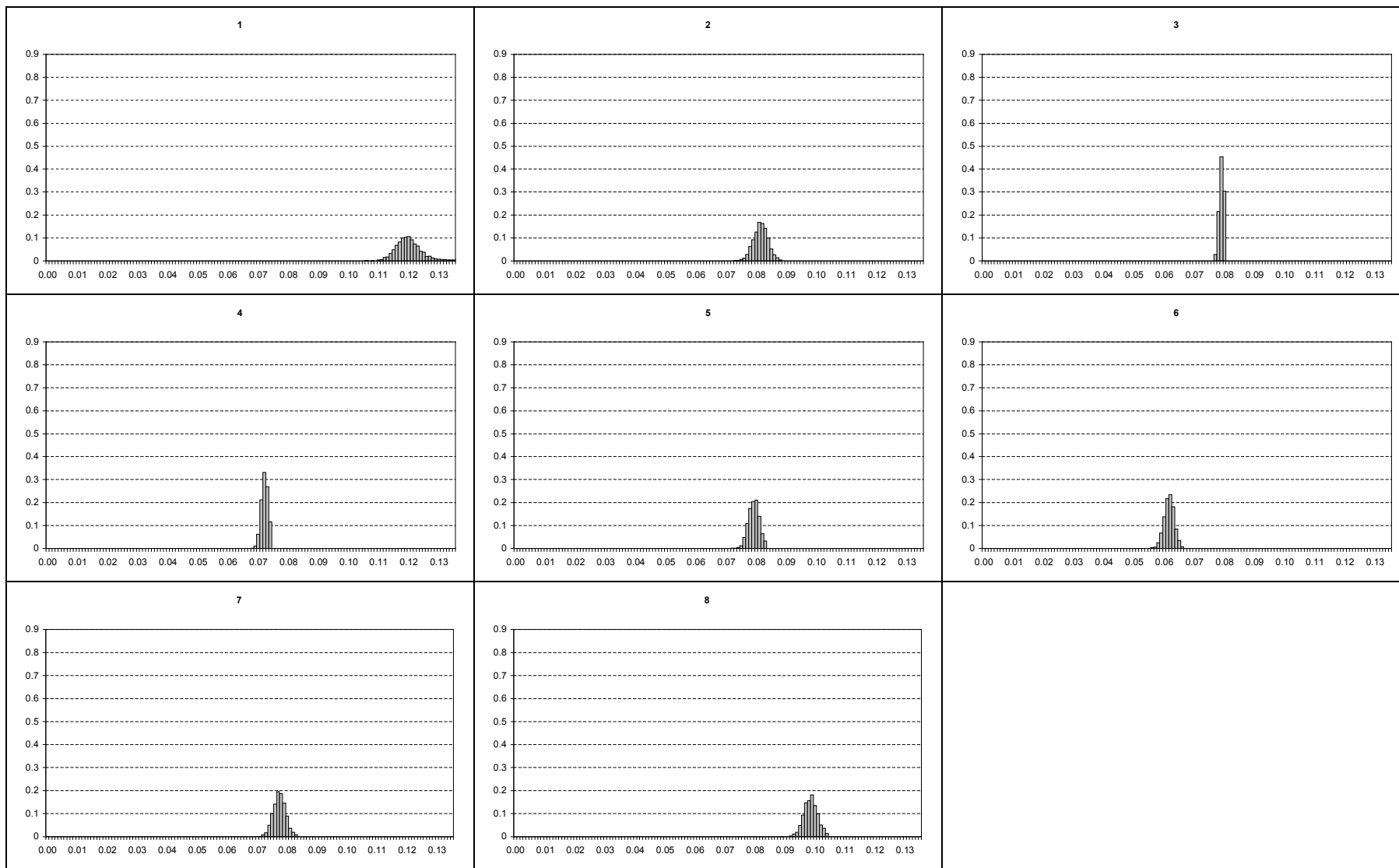
Histogramy jsou uvedeny pouze pro posledních devět věkových stupňů, protože podle zadání úlohy není v porostech mladších než 80 let úmyslná mýtní těžba přípustná.

Obrázek. 13 představuje histogram relativních četností pro hodnoty účelové funkce (3.44), tj pro úhrn celkových těžeb během procesu vyrovnání.

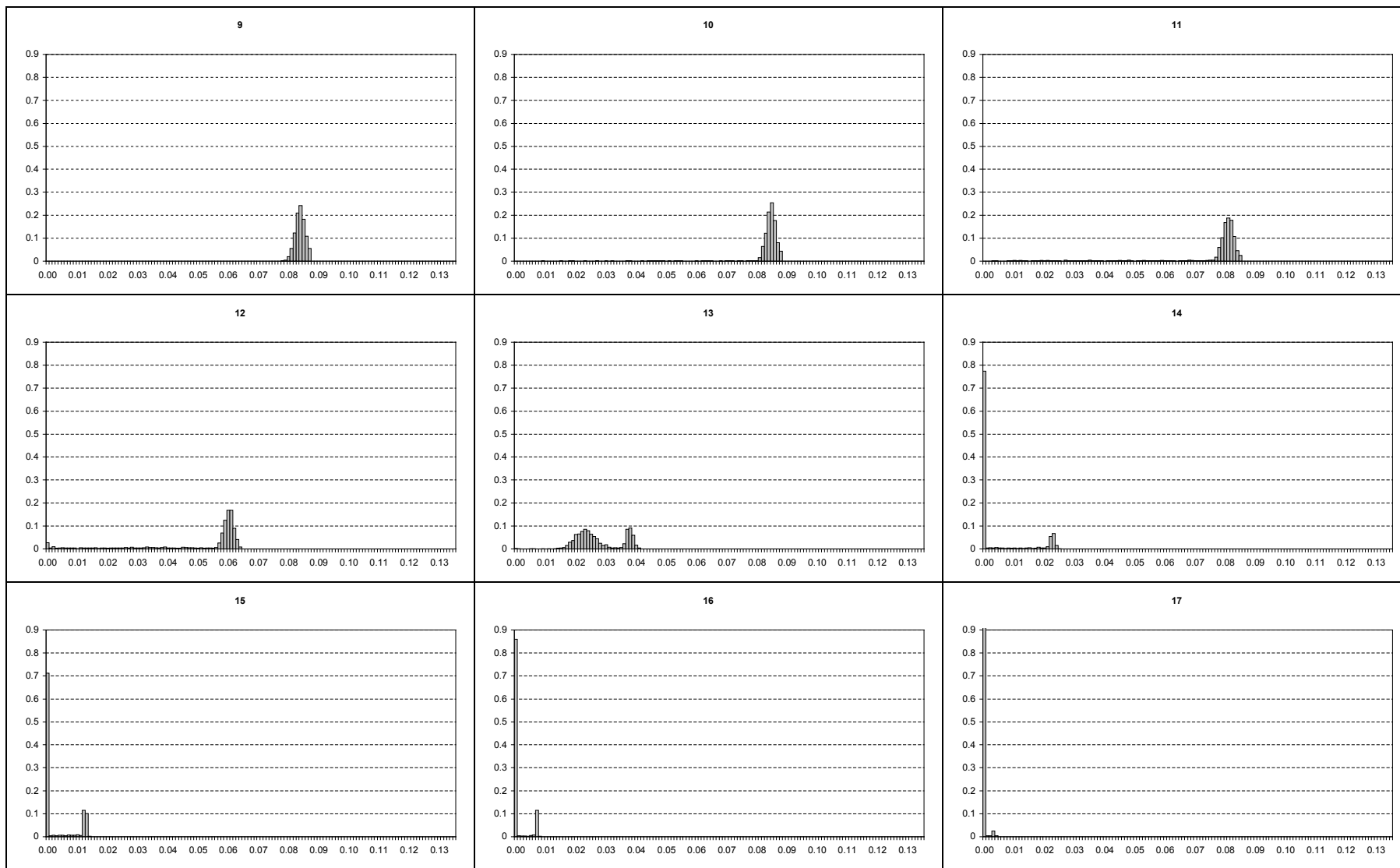
Obrázky 14 a 15 ukazují vývoj veličin od věkové struktury odvozených. Velikosti mýtních těžeb byly vypočítány podle (2.10) a těžeb předmýtních podle (2.11). Těžby nahodilé v j -tém decenniu byly určeny jako $E_N^j = \sum_{i=1}^m l_i^j c_i^j a_i^j$, kde c_i^j je zásoba porostu hlavního z tab. 8. Zásoba porostů v j -tém decenniu je určena jako $Z^j = \sum_{i=1}^m c_i^j a_i^j$. Na obou obrázcích jsou opět vyznačeny intervaly v nichž se příslušné veličiny nacházely v 95 procentech simulací.



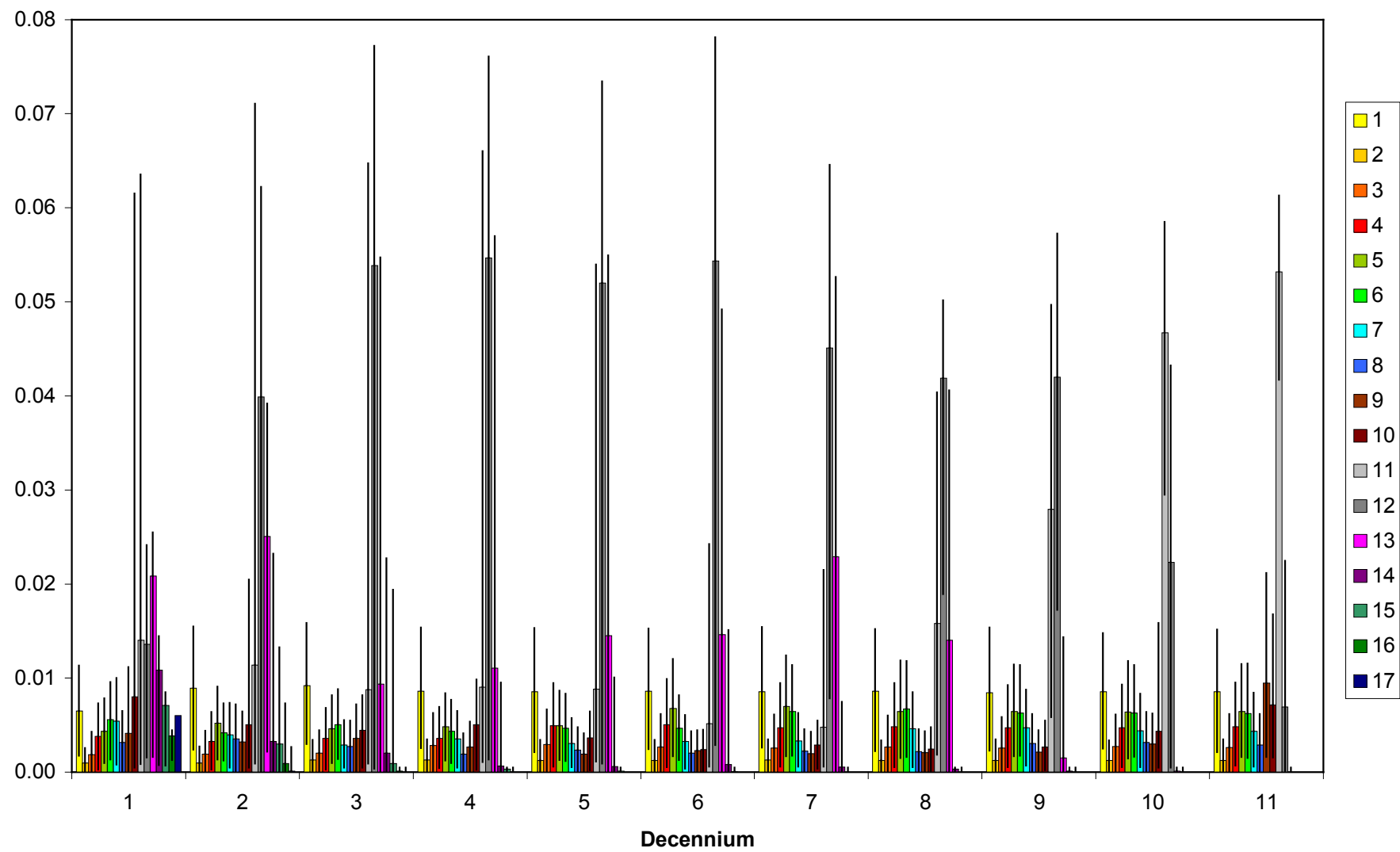
Obr. 7 Vývoj zastoupení věkových stupňů.



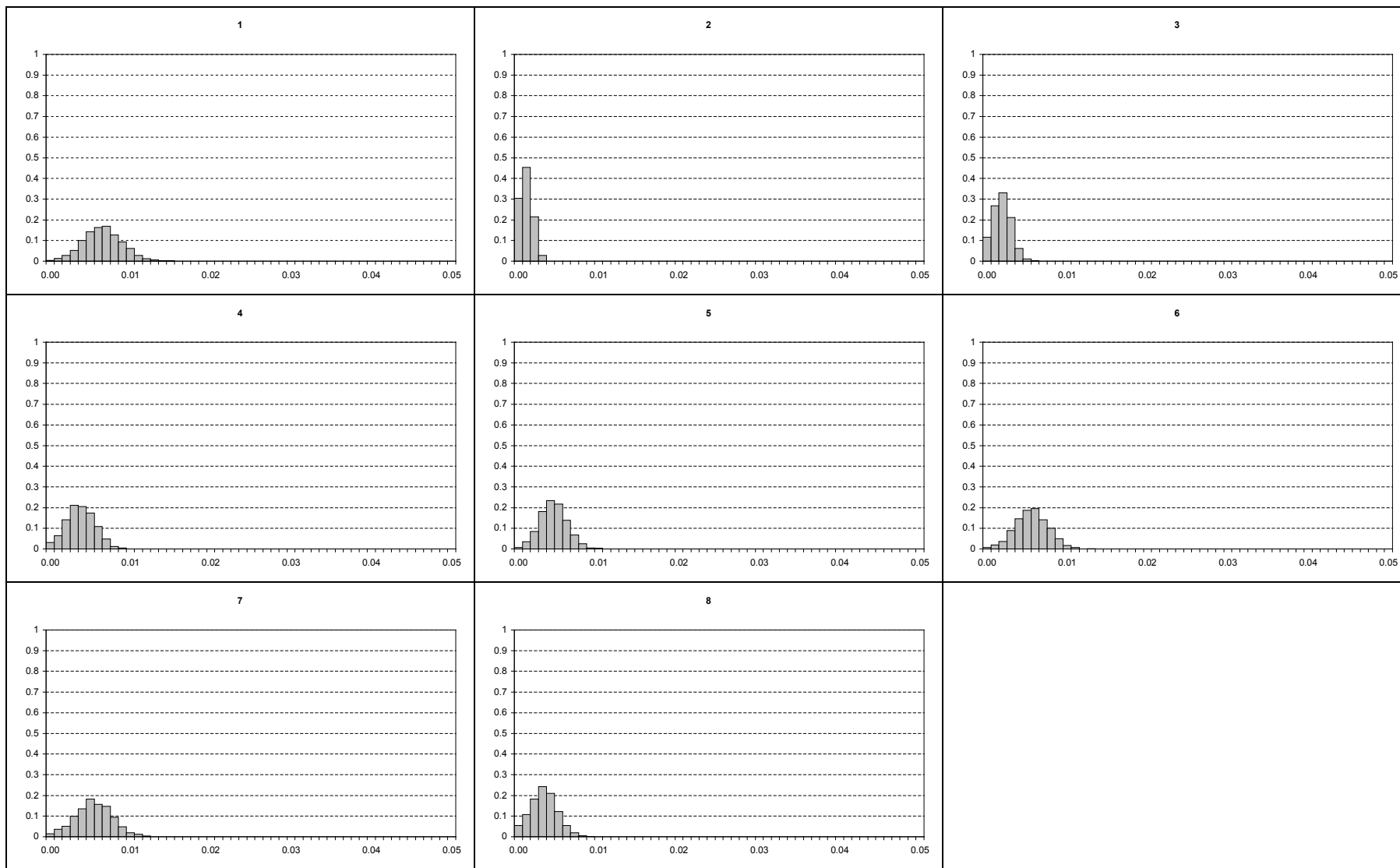
Obr. 8 a – h Histogramy relativních četností pro plošné podíly věkových stupňů v prvním decenniu.



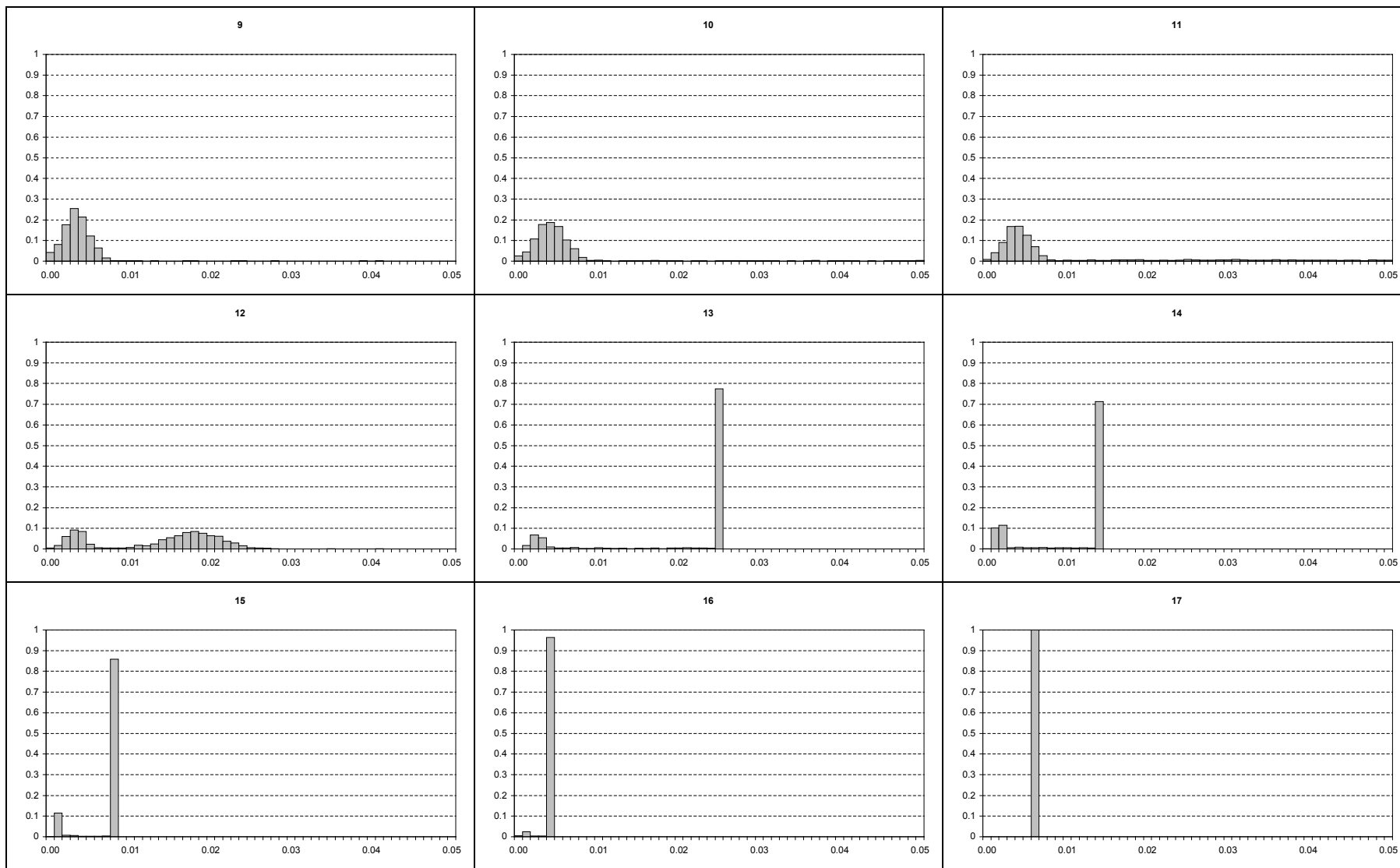
Obr. 8 ch – p Histogramy relativních četností pro plošné podíly věkových stupňů v prvním decenniu.



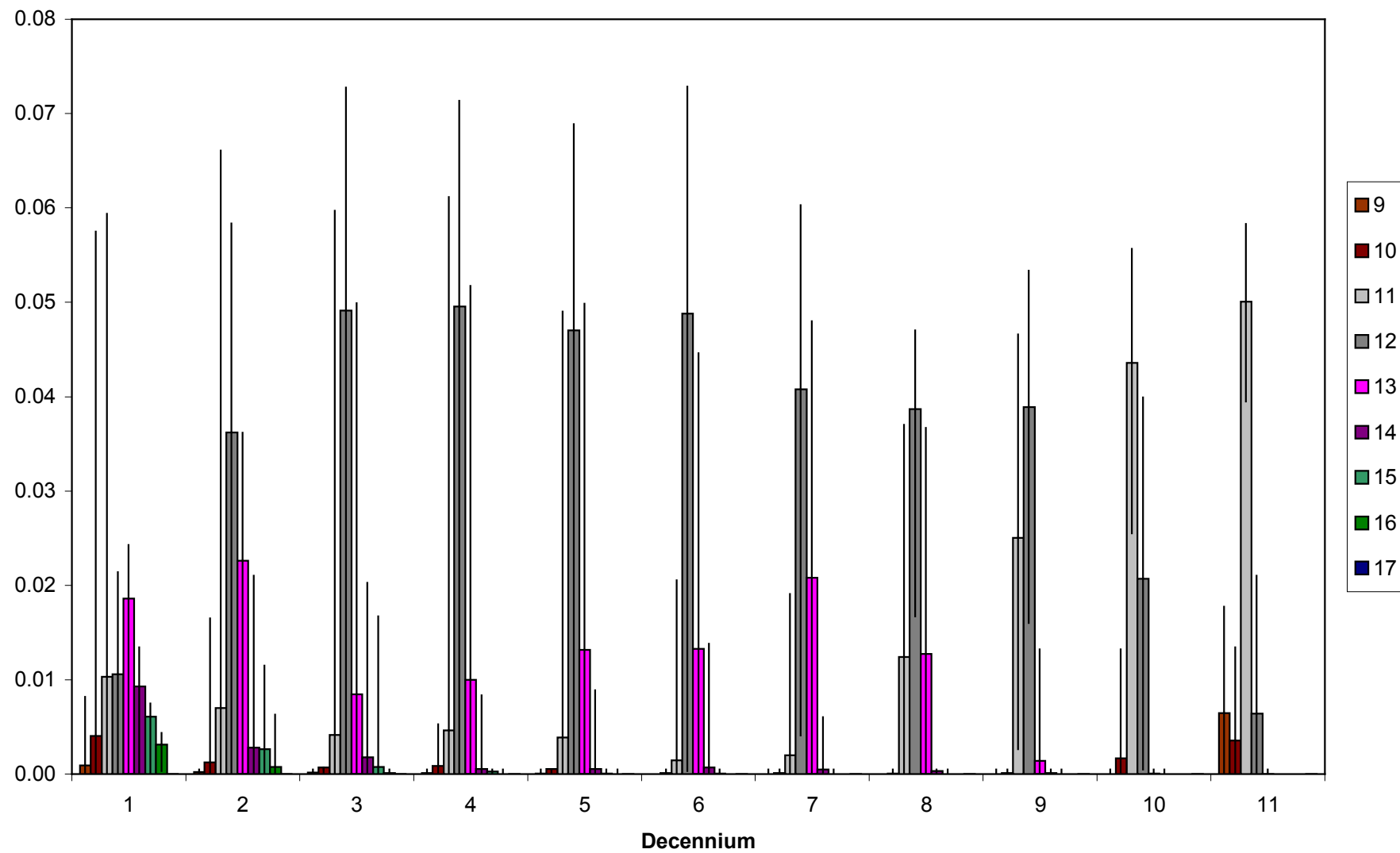
Obr. 9 Vývoj velikosti těžebních ploch.



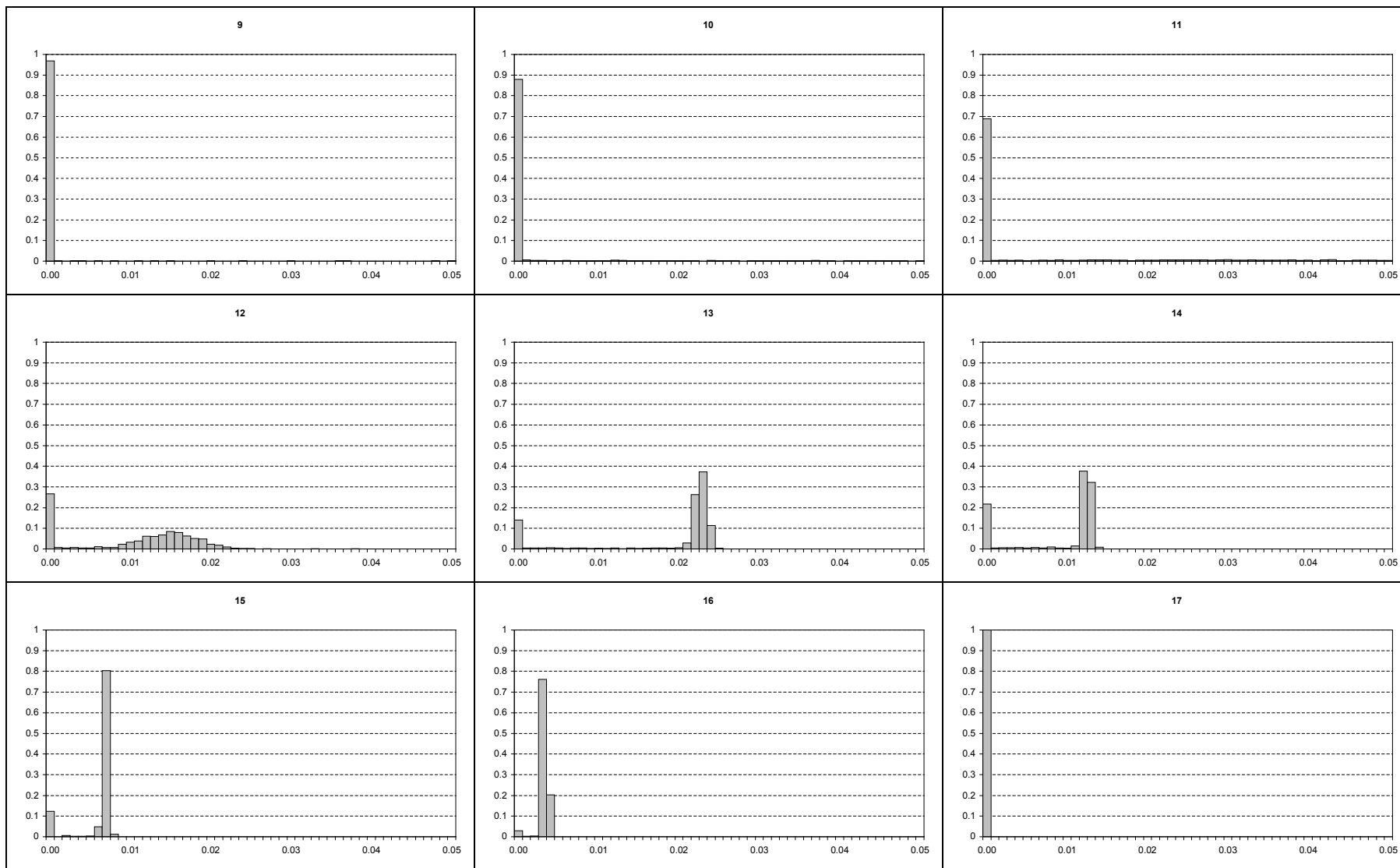
Obr. 10 a – h Histogramy relativních četností velikosti těžebních ploch v prvním decenniu podle věkových stupňů.



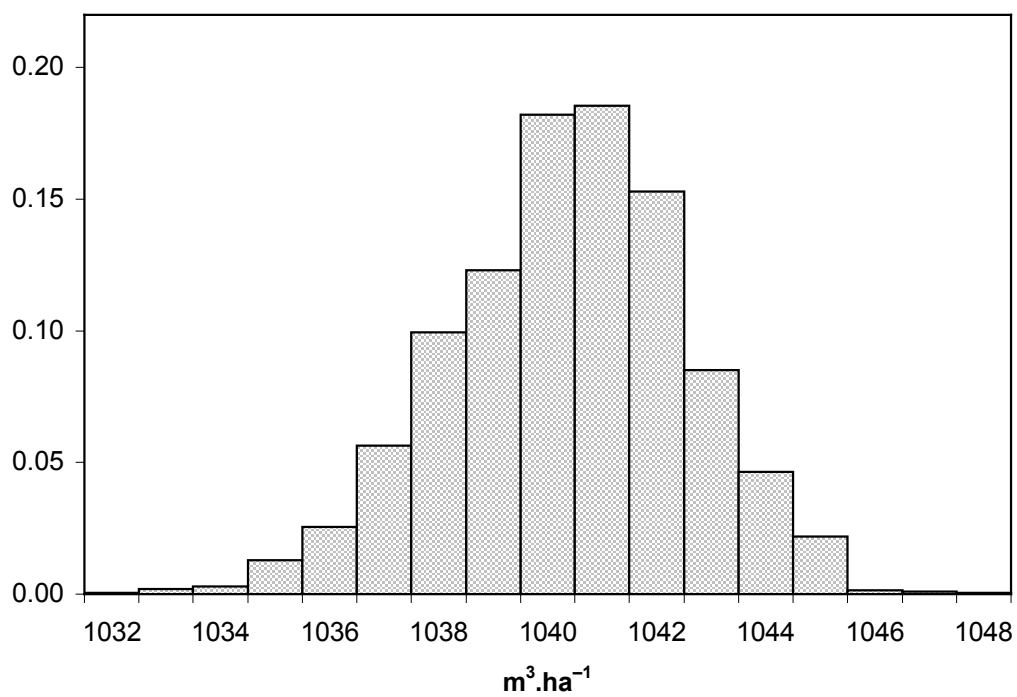
Obr. 10 ch – p Histogramy relativních četností velikosti těžebních ploch v prvním decenniu podle věkových stupňů.



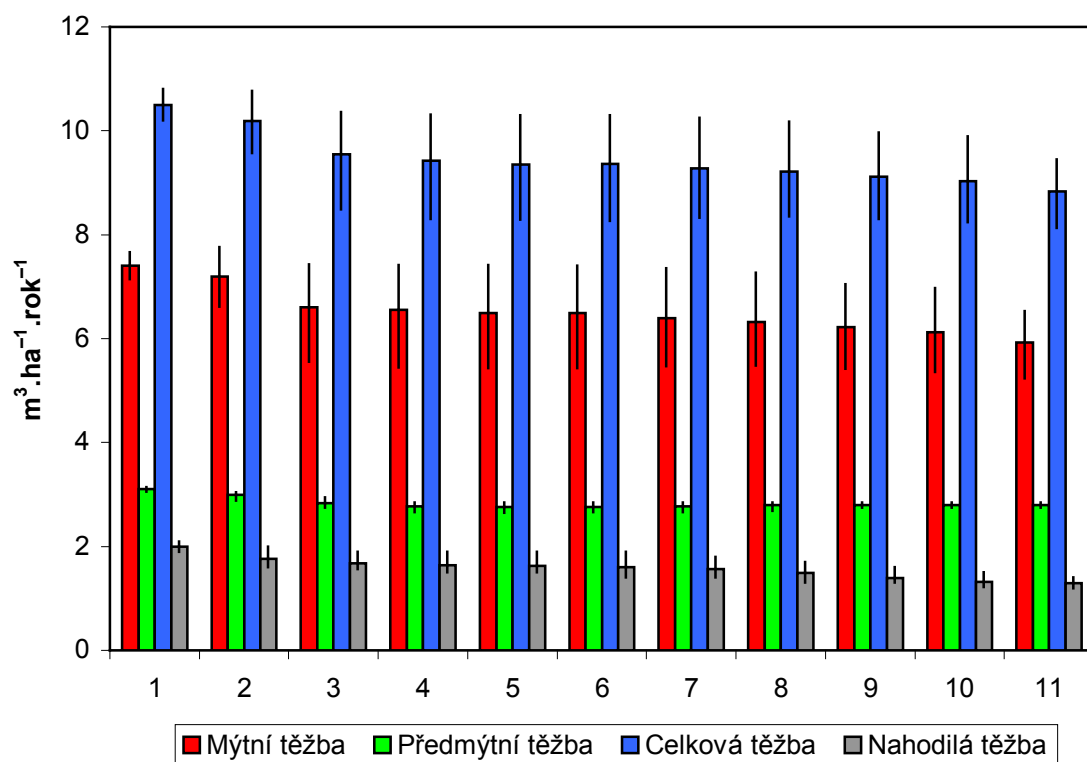
Obr. 11 Vývoj velikosti úmyslné složky těžebních ploch.



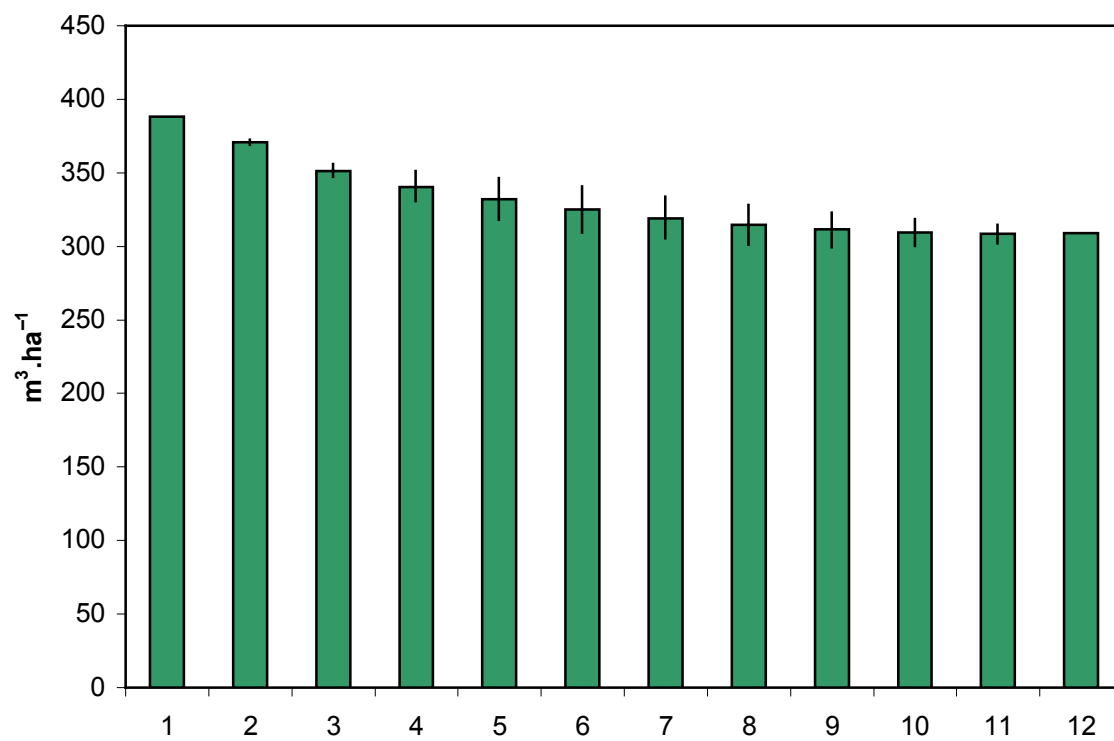
Obr. 12 a – ch Histogramy relativních četností velikosti úmyslné složky těžebních ploch v prvním decenniu podle věkových stupňů.



Obr. 13 Histogram relativních četností hodnot účelové funkce.



Obr. 14 Vývoj těžeb.

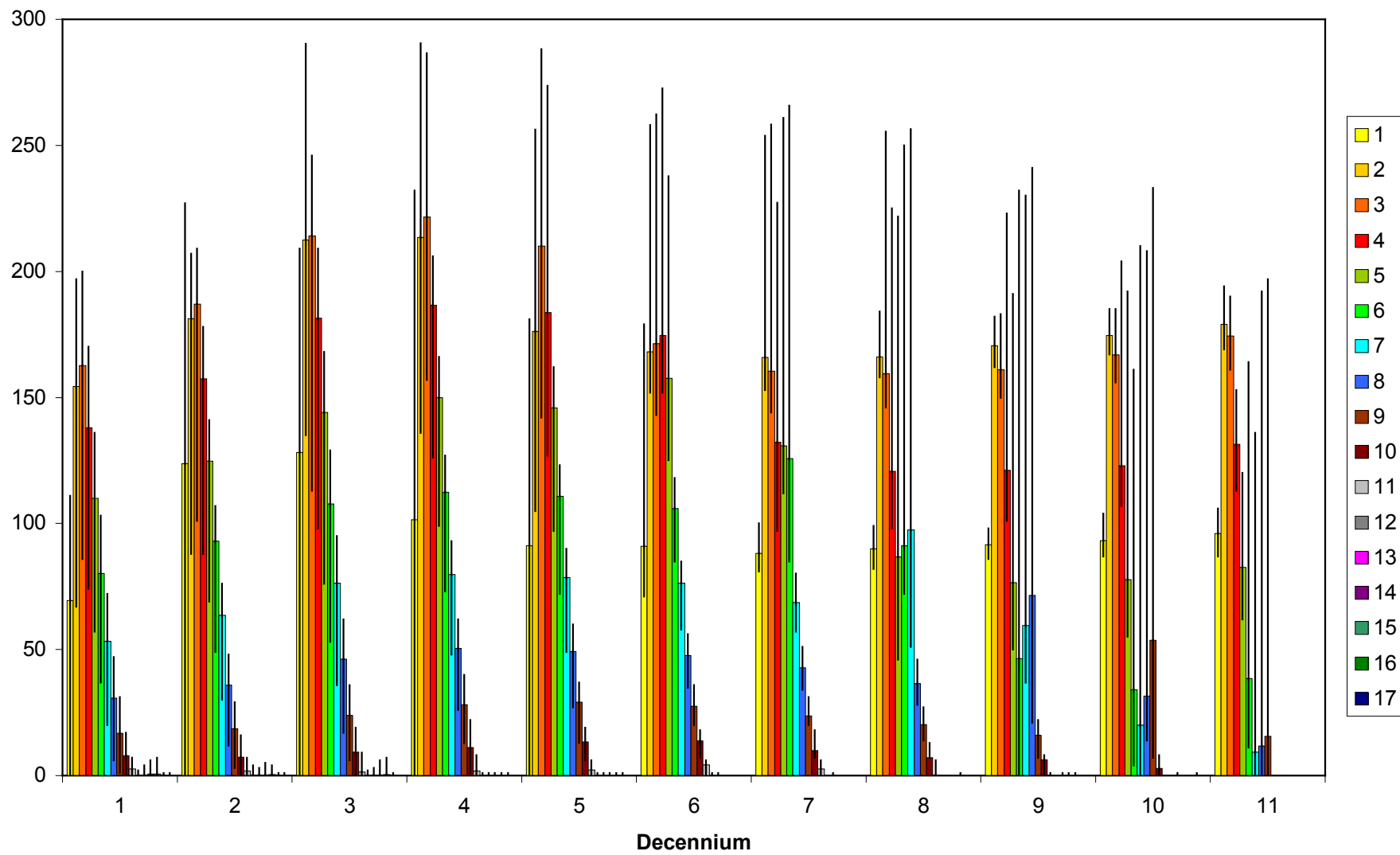


Obr. 15 Vývoj zásoby porostů.

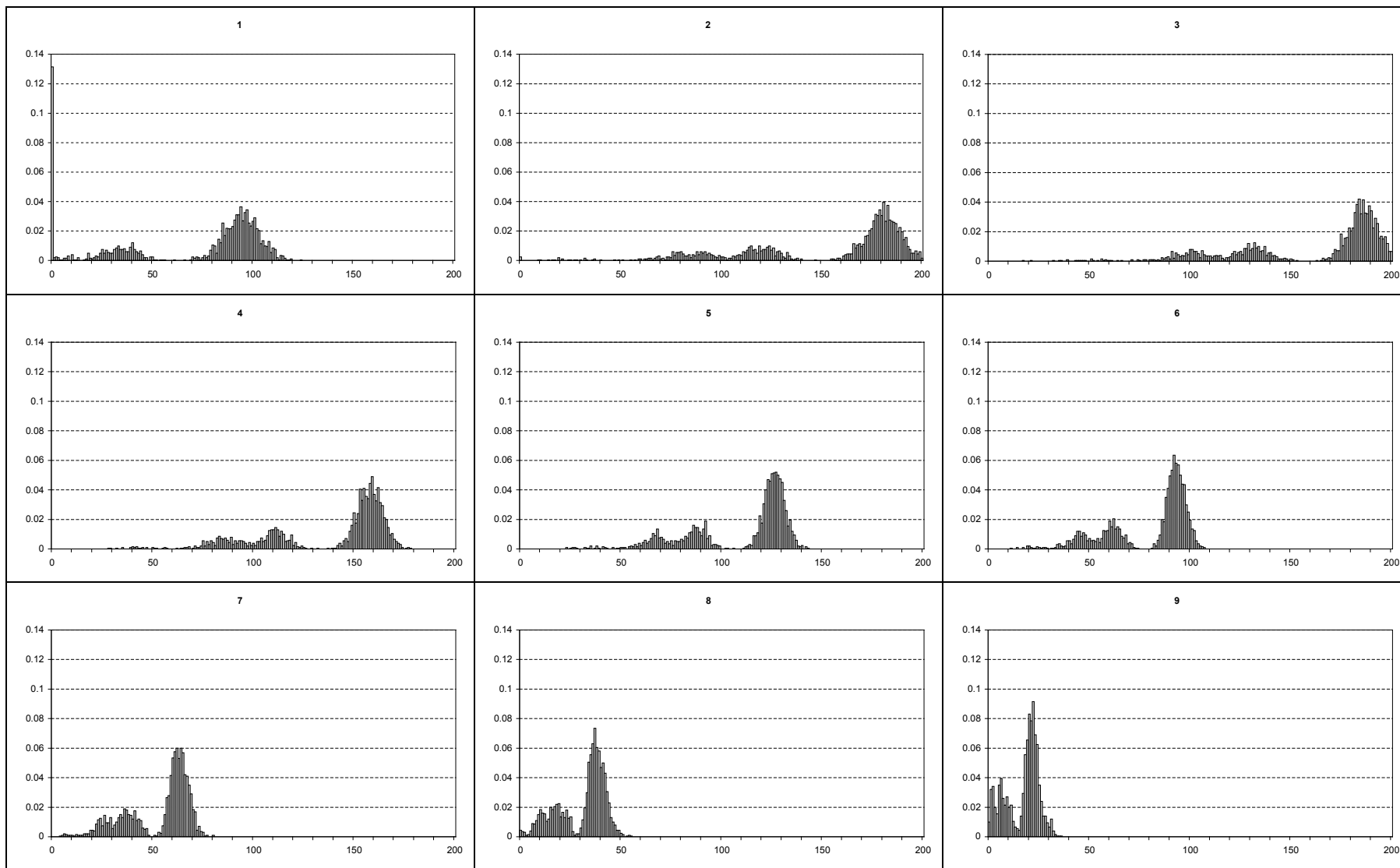
Duální úloha stochastického programování

Obr. 16 zachycuje celkový vývoj hodnot duálních proměnných (stínových cen) v rámci metody stochastického programování pro dolní meze těžeb v jednotlivých věkových stupních. Střední hodnoty duálních cen nevykazují proti výsledkům úlohy s konstantními nahodilými těžbami (obr. 5) významné rozdíly. Detailní pohled na rozdělení hodnot duálních proměnných pro první decennium vyrovnávacího procesu poskytují histogramy relativních četností 17 a – 17 p.

Obr. 18 prezentuje celkový vývoj hodnot duálních proměnných pro horní meze těžeb. Histogramy 19 a – 19 ch dávají detailní pohled na rozdělení hodnot proměnných pro první decennium. Zobrazeny jsou pouze věkové stupně s netriviálním rozdělením.



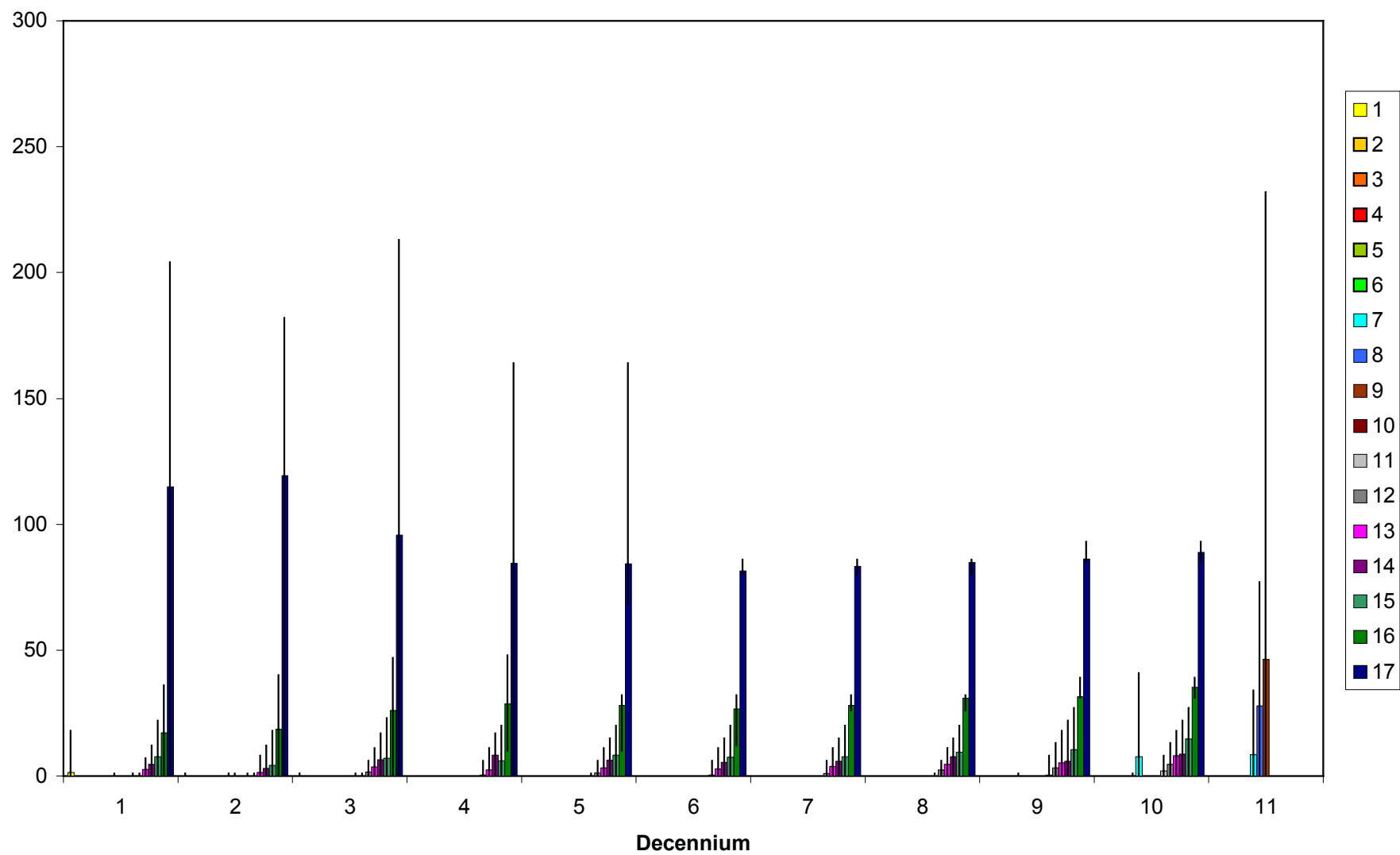
Obr. 16 Vývoj hodnot duálních proměnných pro dolní meze podmínek.



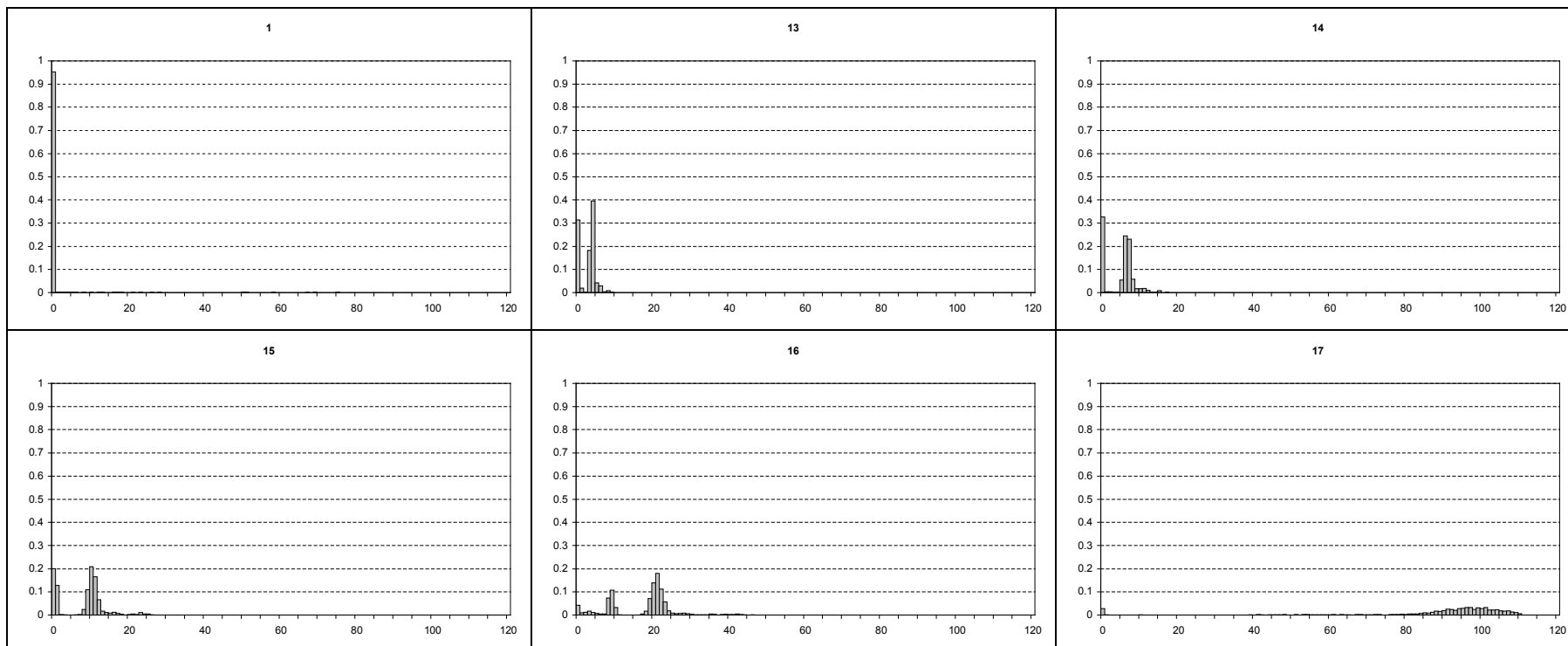
Obr. 17 a – ch Histogramy relativních četností hodnot duálních proměnných pro dolní meze podmínek v prvním decenniu.



Obr. 17 i – p Histogramy relativních četností hodnot duálních proměnných pro dolní meze podmínek v prvním decenniu.



Obr. 18 Vývoj hodnot duálních proměnných pro horní meze podmínek.



Obr. 19 a – ch Histogramy relativních četností hodnot duálních proměnných pro horní meze podmínek v prvním decenniu.

5. Závěr

Cílem předkládané práce byl rozvoj metod optimálního řízení vývoje věkové struktury lesních porostů. Dosažené výsledky lze shrnout do několika bodů.

Bylo rozšířeno spektrum veličin, vzhledem k nimž je možné průběh vyrovnávacího procesu optimalizovat. Stávající formulace problému umožňovala optimalizaci pouze vzhledem k veličinám přímo závislým na velikostech těžebních ploch. Nově odvozené účelové funkce dovolují za tímto účelem využít i veličin závislých na velikostech porostních ploch (plochách porostů v jednotlivých věkových stupních) a rovněž tak i kombinaci porostních a těžebních ploch.

Byla navržena nová formulace optimalizační úlohy, v níž v roli strukturních proměnných vystupují namísto těžebních ploch plochy porostní. V jejím rámci byly odvozeny účelové funkce umožňující optimalizaci vzhledem k veličinám závislým na porostních plochách, těžebních plochách i na jejich kombinaci.

Bylo ukázáno, že při volbě odpovídajících si účelových funkcí jsou výsledky získané pomocí nové i původní formulace optimalizační úlohy ekvivalentní. Nově navržená formulace je přitom jednodušší a její použití vede k výraznému urychlení výpočtů.

Do všech důsledků byl respektován náhodný charakter kalamitních těžeb a jejich proměnlivost v průběhu vyrovnávacího procesu. Proměnlivost byla uvažována i u cenových koeficientů účelových funkcí. Pro řešení úlohy proto bylo namísto standardního lineárního programování použito metody stochastického programování.

Byl vyvinut vlastní software pro automatizované sestavování a řešení uvedených optimalizačních úloh.

Další rozvoj v této oblasti je možný v několika směrech. Jedním z nich je problematika stanovení vstupních parametrů optimalizační úlohy. V případě nahodilých těžeb dosud nebyly podrobněji zkoumány otázky dlouhodobého vývoje pravděpodobností zničení porostů kalamitami, jejich proměnlivost, prostorové a časové závislosti apod. Zde by tedy šlo o vývoj realistických modelů nahodilých těžeb.

V případě kritérií pro optimalizaci vyrovnávacího procesu by byl zajímavý přechod od naturálního vyjádření produkce k jejímu finančnímu ohodnocení, tedy zahrnutí vhodného modelu dlouhodobého vývoje cen.

Formulace optimalizačních úloh v této práci předpokládají aplikaci na relativně homogenní soubor lesních porostů. Dalším krokem by mělo být jejich zobecnění do podoby umožňující současnou práci s porosty různých charakteristik. Tak by například bylo možné optimalizovat průběh změn dřevinné skladby porostů.

Se vzrůstající složitostí řešených úloh dramaticky roste i výpočetní náročnost. Pro efektivní optimalizaci vývoje rozsáhlejších porostních souborů zřejmě bude potřebné zbývat se otázkou volby vhodné výpočetní metody – náhradou simplexové metody některou z metod přibližných.

6. Literatura

- [1] ANDĚL, J., 1998: Statistické metody. Matfyzpress, Praha, 1998, 2. vydání, 274 s.
- [2] BECK, J., LAGOVÁ, M., ZELINKA, J., 1982: Lineární modely v ekonomii. SNTL, Praha, 264 s.
- [3] BEYER, O., GIRLICH, H. J., ZSCHIESCHE, H. V., 1982: Stochastische Prozesse und Modelle. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 120 s.
- [4] BUONGIORNO, J., Lin, C. R., 1998: Tree diversity, landscape diversity, and economics of maple-birch forests: Implications of Markovian models. *Management Science*, 44 (10): 1351–1366.
- [5] BUONGIORNO, J., 2001: Generalization of Faustmann's Formula for Stochastic Forest Growth and Prices with Markov Decision Process Models. *Forest Science*, 47 (4): 466–474.
- [6] BURGESS, J. C., ULPH, D., 2001: Forest land conversion over time: Implications for the Faustmann Formula. *Forest Science*, 47 (4): 510–519.
- [7] CROWE, K., NELSON, J., 2003: An indirect search algorithm for harvest-scheduling under adjacency constraints. *Forest Science*, 49 (1): 1–11.
- [8] CROWE, K., NELSON, J., 2005: An evaluation of the simulated annealing algorithm for solving the area-restricted harvest scheduling model against optimal benchmarks. *Canadian Journal of Forest Research*, 35 (10): 2500–2509.
- [9] DVOŘÁKOVÁ, Š., ZAHRADNÍK, D., 2005: Modelování věkové struktury lesa pomocí programu Mathematica. *Mundus Symbolicus*, 13, 165–171.
- [10] FAUSTMANN, M., 1849: Berechnung des Wertes welchen Waldboden sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirtschaftbesitzen. *Allgemeine Forst und Jagdzeitung*, 15: 112–129.
- [11] VON GADOW, K., 2000: Evaluating Risk in Forest Planning Models. *Silva Fennica*, 34 (2): 181–191.
- [12] GONG, P., YIN, R., 2004: Optimal harvest strategy for slash pine plantations: The impact of autocorrelated prices for multiple products. *Forest Science*, 50 (1): 10–19.

- [13] Halaj, J., Petráš, R., 1998: Rastové tabulky hlavných drevín. SAP- Slovak Academic Press, Bratislava, 325 s.
- [14] HASLE, G., HAAVARDTUN, J., KLOSTER, O., LOKKETANGEN, A., 2000: Interactive planning for sustainable forest management. *Annals of Operations Research*, 95 (1): 17–40.
- [15] HEAPS, T., 1984: The forestry maximum principle. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 7: 131–151.
- [16] HEYER, C., 1841: Die Waldertragregelung. Ferber, Giessen, 264 s.
- [17] HOLÉCY, J., 1992: Optimalizácia prevodu porastov lesného majetku na normálny les v podmienkach rizika. Sborník mezinárodní vědecké konference Les, drevo, ekologia, TU Zvolen.
- [18] HOLÉCY, J., 1994: Size-reducing the matrix of stands age classes transition probabilities for a simplification of woodland management models. Sborník sympozia Aktuálne problémy v rozvoji hospodárskej úpravy lesov, TU Zvolen, 21.-22. 6. 1994.
- [19] HOLÉCY, J., 1997: Vliv náhodných ťažieb na výnosovú mieru investovania do lesnej pôdy. Sborník konference Finančné riadenie firiem a investovanie, TU Zvolen, 27. 11. 1997.
- [20] HOLÉCY, J., 1999: Finančná optimalizácia obhospodarovania lesného majetku v podmienkach rizika náhodných ťažieb. *Journal of Forest Science*, 45 (1): 38–47.
- [21] HOLÉCY, J., Hanewinkel, M., 2006: A forest management risk insurance model and its application to coniferous stands in southwest Germany. *Forest Policy and Economics*, 8 (2): 161 – 174.
- [22] HUNDESHAGEN, J. C., 1826: Die Forstabschätzung auf neuen wissenschaftlichen Grundlagen. H. Laupp, Tübingen.
- [23] HYYTIAINEN, K., TAHVONEN, O., 2001: The effects of legal limits and recommendations on timber production: The case of Finland. *Forest Science*, 47 (4): 443–454.
- [24] KEMENY, J. G., SNELL, J. L., 1960: Finite Markov chains. Van Nostrand, Princeton. 271 s.

- [25] KIRÁLY, L., 1986: Modelle für Waldfondsprognose und Ertragsregelung. Wissenschaftliche Tagung 8. –10. Oktober 1986 in Tharandt, TU Dresden.
- [26] KIVISTE, A., et al., 2002. Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal. Ministerio de ciencia y tecnología – Instituto nacional de investigación y tecnología agraria y alimentaria (INIA), Madrid, 190 s.
- [27] KLOCEK, A., OESTEN, G., 1990: Die Darstellung der Waldentwicklung in Form von Matrizen. Arbeitspapier 4–90, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.
- [28] KOLENKA, I., KLACKO, Š., HAJDÚCHOVÁ, I., 1996: Problems of forest enterprise financing during the transition period. Liiketaloudellinen Aikakauskirja - Företagsekonomisk Tidskrift - The Finnish Journal of Business Economics, Helsinki 1996: 101-110.
- [29] KORDA, B. a kol., 1967: Matematické metody v ekonomii. SNTL Praha, 604 s.
- [30] KORF, V., 1939: Příspěvek k matematické definici vzrůstového zákona lesních porostů. Lesnická práce: 339–356.
- [31] KOUBA, J., 1973: Systémový přístup k výzkumné a řídicí práci v lesním hospodářství. Lesnictví, 19: 677–686.
- [32] KOUBA, J., 1973: Die Markoffschen Ketten und Definition des Normalwaldes. Internationales Forsteinrichtungssymposium, TU Dresden, 25.9. – 28.9.1973: 381–390.
- [33] KOUBA, J., 1977: Markov chains and modelling the long-term development of the age structure and production of forest. Proposal of a new theory of the normal forest. Scientia agriculturae bohemica, 9 (3): 179–193.
- [34] KOUBA, J., 1977: Modelování a řízení dlouhodobého vývoje produkce lesů. Habilitační práce, Vysoká škola zemědělská, Praha, 220 s.
- [35] KOUBA, J., 1981: Quantifizierung von Risikofaktoren. Wiss. Tagung-Steigerung und Sicherung der Forstlichen Rohstoffproduktion. TU Dresden, Sektion Forstwirtschaft, Tharandt 1981, Band II: 185–193.
- [36] KOUBA, J., 1983: Teorie normálního lesa na základě náhodných procesů. Lesnictví, 29 (10): 915–930.

- [37] KOUBA, J., 1985: Stanovení objemové produkce lesů. *Lesnictví*, 31 (10): 883–903.
- [38] KOUBA, J., 1986: Teorie náhodných procesů v hospodářské úpravě lesů. *Medzinárodné sympóziu Nové smery v hospodárskej úprave lesů*, Zvolen 16.–17.9.1986: 117–129.
- [39] KOUBA, J., 1987: Modelling the production projections of diseased forests by scenarios based on random processes. *IUFRO S. 4.04-02*. Zvolen 1987: 131–138.
- [40] KOUBA, J., 1987: Modelování produkce nemocných lesů na základě náhodných procesů. *Lesnictví* 33 (10): 875–886.
- [41] KOUBA, J., KAŠPAROVÁ, I., 1988: Metody optimálního řízení produkce lesů na základě náhodných procesů. *Závěrečná zpráva ČZU Praha, Ústav aplikované ekologie*.
- [42] KOUBA, J., 1989: Teorie odhadu vývoje kalamit a řízení procesu vyrovnání lesa na normální les. *Lesnictví*, 35 (10): 925–944.
- [43] KOUBA, J., 1989: Control of the conversion process towards the stochastically defined normal forest by the linear and stochastic programming. *Lesnictví*, 35 (11): 1025–1040.
- [44] KOUBA, J., 1991: Derivation of the first and following age stages surface rates in stochastically defined normal forest. *Lesnictví* 37 (10): 807–817.
- [45] KOUBA, J., 1999: Natural disaster in forests referred to in the oldest Czech (Bohemian) chronicles (1091–1526). Poster: *Symposium IUFRO, div. 4, W.P. 4.04.02, R.G. 4.13.00*, Faculty of Forestry, Czech University of Agriculture, Prague.
- [46] KOUBA, J., 2000: Život lesa a jeho nejistota v čase. *Mezinárodní sympóziu Perspektívy rozvoja hospodárskej úpravy lesov v SR*, TU Zvolen, 21.–22.6.2000: 47–51.
- [47] KOUBA, J., 2001: Teorie náhodných procesů a konstrukce tabulek života lesa. *Mezinárodní konference Funkčně integrované lesné hospodárstvo a trvalo udržateľný rozvoj lesov a krajiny*, TU Zvolen, 26.–27.6.2001: 97–104.
- [48] KOUBA, J., 2001: Vztah prostorové a těžební úpravy na základě skutečných výsledků a praktických hospodářských možností. *Mezinárodní sympóziu Súčasnosc' a nové*

- smery hospodárskej úpravy lesa. Problematika priestorovej a ťažbovej úpravy lesa v súčasnosti. TU Zvolen, 11.-12.9 2001: 217–222.
- [49] KOUBA, J., 2002: Das Leben des Waldes und seine Lebensunsicherheit (Forest Life and its Temporal Uncertainty). Forstwissenschaftliches Centralblatt, 121: 211–228.
- [50] KOUBA, J., ZAHRADNÍK, D., 2004: Forest production steering to sustained yield under risk condition by interactive linear programming task construction. Mezinárodní konference Sustain Life Secure Survival II, ČZU Praha, ISBN 80-213-1197-5, 22.9.2004–25.9.2004, 13 s.
- [51] KOUBA, J., ZAHRADNÍK, D., 2004: Forest production steering to sustained yield under risk condition by interactive linear programming task construction. Scientia Agriculturae Bohemica, 35 (4): 140–146.
- [52] KŘEPELA, M., 2002: Vývoj lesnického zákonodárství na území České republiky z hlediska hospodářské úpravy lesů. Disertační práce, Česká zemědělská univerzita, Praha, 169 s.
- [53] LOHMANDER, P., 2000: Optimal sequential forestry decisions under risk. Annals of Operations Research, 95: 217–228.
- [54] MAEDER, R., 1997: Programming in Mathematica. Addison-Wesley, Reading, 366 s.
- [55] MANDL, P., 1985: Pravděpodobnostní dynamické modely. Academia, Praha, 184 s.
- [56] MECKO, J., 1989: Rubná zrelost' smreka a jedle so zretělom na ťažby spôsobované abiotickými činitěľmi. Lesnictví 35 (10): 911–924
- [57] MITRA, T., WAN, H. Y., 1985: Some theoretical results on the economics of forestry. Review of Economic Studies, 52, 263–282.
- [58] MITRA, T., WAN, H. Y., 1986: On the Faustmann solution to the forest management problem. Journal of Economic Theory, 40: 229–249.
- [59] NAUTIYAL, J. C., PEARSE, P. H., 1967: Optimizing the conversion to sustained yield – A programming solution. Forest Science, 13: 131–139.
- [60] PELTOLA, J., KNAPP, K. C., 2001: Recursive preferences in forest management. Forest Science, 47 (4): 455–465.
- [61] PFEFFER, A., 1961: Ochrana lesů. SZN Praha, 838 s.

- [62] PRIESOL, A., POLÁK, L., 1991: Hospodárska úprava lesov. Príroda, Bratislava.
- [63] REBAIN, S., MCDILL, M. E., 2003: A mixed-integer formulation of the minimum patch size problem. *Forest Science*, 49 (4): 608–618.
- [64] REEVES, L. H., HAIGHT, R. G., 2000: Timber harvest scheduling with price uncertainty using Markowitz portfolio optimisation. *Annals of Operations Research* 95 (1): 229–250.
- [65] RICHARDS, F. J., 1959: A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10 (29): 290–300.
- [66] ROLLIN F., BUONGIORNO, J., ZHOU, M., PEYRON, J. L., 2005: Management of mixed-species, uneven-aged forests in the French Jura: from stochastic growth to decision tables. *Forest Science*, 51 (1): 64–75.
- [67] SALO, S., TAHVONEN, O., 2002: On equilibrium cycles and normal forests in models for forest resources. *Journal of Environmental Economics and Management*, 44 (1): 1–22.
- [68] SALO, S., TAHVONEN, O., 2002: On the optimality of a normal forest with multiple land classes. *Forest Science*, 48 (3): 530–542.
- [69] SALO, S., TAHVONEN, O., 2003: On the economics of forest vintages. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27 (8): 1411–1435.
- [70] SIST, P., PICARD, N., GOURLET-FLEURY, S., 2003: Sustainable cutting cycle and yields in a lowland mixed dipterocarp forest of Borneo. *Forest Science*, 60: 803–814.
- [71] SUZUKI, T., 1981: Die Gentan – Wahrscheinlichkeit als Anwendung von Markow-Ketten in der Forstwissenschaft. XVII IUFRO World Congress, Kyoto: 165–170.
- [72] SUZUKI, T., 1983: Gentan – Wahrscheinlichkeit, Vorhersagemodelle für die Entwicklung des Normalwaldes und für die Planung des Holzaufkommens. In: Beiträge zur biometrischen Modellbildung in der Forstwirtschaft von T. Suzuki unter Mitwirkung von B. Sloboda und J. Saborowski. Schriften aus der Forstlichen Fakultät der Universität Göttingen, Band 76: 7–22.
- [73] TAHVONEN, O., 1998: Bequests, credit rationing and in situ values in the Faustmann-Pressler-Ohlin forestry model. *The Scandinavian journal of economics*, 100: 781–800.

- [74] TAHVONEN, O., SALO, S., 1999: Optimal forest rotation with in situ preferences. *Journal of Environmental Economics and Management*, 37: 106–128.
- [75] TAHVONEN, O., SALO, S., KUULUVAINEN, J., 2001: Optimal forest rotation and land values under a borrowing constraint. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25: 1595–1627.
- [76] THOMSON, T. A., 1992: Optimal Forest Rotation when Stumpage Prices Follow a Diffusion Process. *Land Economics*, 68 (3): 329–342.
- [77] UUSIVUORI, J., 2002: Nonconstant risk attitudes and timber harvesting. *Forest Science*, 48 (3): 459–470.
- [78] WALTER, J., 1970: *Stochastické modely v ekonomii*. SNTL/Alfa Praha. 196 s.
- [79] WAN, H. Y., 1994: Revisiting the Mitra-Wan tree farm. *Internat. Econ. Rev.*, 35: 193–198.
- [80] YOSHIMOTO, A., SHOJI, I., 2002: Comparative analysis of stochastic models for financial uncertainty in forest management. *Forest Science*, 48 (4): 755–766.
- [81] ZEIDE, B., 1993: Analysis of growth equations. *Forest Science*, 39: 594–616.
- [82] ZHOU, M., BUONGIORNO, J., 2005: Forest landscape management in a stochastic environment, with an application to mixed loblolly pine–hardwood forests. *Forest Ecology and Management*, 223: 170–182.
- [83] ŽÍHLAVNÍK, A., 2005: *Hospodářská úprava lesov*. Technická univerzita vo Zvolene, 389 s.
- [84] *Informace o stavu lesů 2000 (stav k 31.12.2000)*, Česká republika. Ústav pro hospodářskou úpravu lesů, Brandýs nad Labem.
- [85] *Zákon o lesích a příslušné vyhlášky*. Ministerstvo zemědělství České republiky, Praha, 1996, 130 s.